Chapitre 1

Rappels sur les suites Récurrence

Corrigés des exercices

pour progresser (page 18)

Généralités sur les suites

1 $v_1 = 2$ et $v_2 = 5$.
$v_{n+2} = 3v_{n+1} - 1 = 3(3v_n - 1) = 9v_n - 4$.

2 $u_{n+1} = \dfrac{n+1}{n^2+2n+5}$; $u_{n+2} = \dfrac{n-3}{n^2-6n+13}$;

$u_{2n} = \dfrac{n}{2n^2+2}$.

Note : Dans les exercices 3 à 5, on applique l'une des trois méthodes décrites page 15.

3 **a)** Pour $n > 0$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^2 < 1$: (u_n) est décroissante.
b) $u_{n+1} - u_n = \sqrt{3n+4} - \sqrt{3n+1} > 0$: (u_n) est croissante.

c) $u_n = f(n)$ avec $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+4}$; $f'(x) = \dfrac{9}{(x+4)^2} > 0$.
f est croissante, donc (u_n) est croissante.

4 *Corrigé dans le manuel.*

5 **a)** $u_{n+1} - u_n = -3 < 0$: (u_n) est décroissante.
b) (u_n) change de signe à chaque indice, donc pas de monotonie.

c) Tous les termes de la suite sont positifs, et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 2 > 1$: (u_n) est croissante.

6 **a)** $u_{n+1} - u_n = -3 < 0$: (u_n) est décroissante.

b) $u_n = f(n)$ avec $f(x) = \dfrac{x+1}{x+2}$; $f'(x) = \dfrac{1}{(x+2)^2}$.
f est croissante, donc (u_n) est croissante.

7 **a)** $u_n > 0$ et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 2 > 1$: (u_n) est croissante.
b) u_n change de signe à chaque indice, donc pas de monotonie.

8 **a)** $u_n > 0$ et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = n + 1 > 1$: (u_n) est croissante.

b) $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)^2} - \dfrac{1}{n^2} < 0$: (u_n) est décroissante.

9 **a)** $u_n > 0$ et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(n+1)^2}{(n+1)!} \times \dfrac{n!}{n^2} = \dfrac{(n+1)}{n^2}$;

si $g(x) = x^2 - x - 1$; $g'(x) = 2x - 1$, donc $n^2 > n+1$ dès que $n \geqslant 1$ et (u_n) est croissante.

b) $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$, donc pas de monotonie.

10 *Corrigé dans le manuel.*

11 **a)** $u_0 = 8$; $u_1 = 8$ et $u_n = 8$ pour tout n, donc (u_n) est constante.

b) $u_0 = 2$, $u_1 = \dfrac{7}{2}$ d'où $u_1 - u_0 = \dfrac{3}{2}$;

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3}{4}(u_n - u_{n-1}) ;$$

$(u_{n+1} - u_n)$ est une suite géométrique de premier terme $\dfrac{3}{2}$ et de raison $\dfrac{3}{4}$. Donc $u_{n+1} - u_n > 0$ et (u_n) est croissante.

12 Oui, car pour tout n :
$(u_{n+1} + v_{n+1}) - (u_n + v_n) = (u_{n+1} - u_n) + (v_{n+1} - v_n) \geqslant 0$.

13 • (u_n) est décroissante, (v_n) est croissante.

• $u_n + v_n = \dfrac{n-1}{n^2}$; $(u_n + v_n)$ est décroissante pour $n \geqslant 2$.

• $u_n v_n = -\dfrac{1}{n^3}$; $(u_n v_n)$ est croissante.

14 $v_n = \dfrac{1}{n+1} + \dots + \dfrac{1}{2n}$, d'où :

$$v_{n+1} - v_n = \left(\frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n+2}\right) - \left(\frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}\right)$$

$$= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} > 0 ;$$

(v_n) est croissante.

Suites arithmétiques
Suites géométriques

★ **15** Puisque le triangle est un rectangle, la mesure la plus grande est 90 en degrés. Si on note r la raison de la suite arithmétique, les autres mesures sont $90 - r$ et $90 - 2r$. Comme $(90 - r) + (90 - 2r) = 90$, il vient $3r = 90$, soit $r = 30$ et les mesures sont 30, 60 et 90.

★ **16** • Par récurrence, $v_n > 0$.

• $u_{n+1} = \dfrac{1}{v_{n+1}} = \dfrac{1 + v_n}{v_n} = \dfrac{1}{v_n} + 1 = u_n + 1$; (u_n) est une suite arithmétique de raison 1.

17 Comme $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{2}{3}$, (u_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{3}$. On peut aussi écrire $u_n = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

18 • Comme $u_5 = (5 - 2)r + u_2$, on trouve $r = -18$.
• Puis $u_{20} = u_5 + (20 - 5)(-18) = -283$.

19 • De $u_{10} = u_7 q^3$, on déduit $q^3 = \dfrac{25 \times 1\,080}{2\,197}$, puis :

$$q = \frac{30}{13}.$$

• $u_{30} = u_{10} q^{20} = \dfrac{25}{2\,197}\left(\dfrac{30}{13}\right)^{20}$.

20 *Corrigé sans le manuel.*

★ **21** **1.** $u_n = -2 \times 3^{n-1}$.
2. $S = -28 \times 3^{29}$.
3. De $v_n = u_{2n}$, on déduit que (v_n) est une suite géométrique de raison 9 et de premier terme $v_1 = u_2 = -6$.
Et $S = \dfrac{3}{4}(1 - 9^n)$.

22 $u_{25} = u_0 + 25r = -3 - 50 = -53$;
$u_{125} = u_0 + 125r = -3 - 250 = -253$;
$S = \dfrac{(-53 - 253) \times 101}{2} = -15\,453$.

23 $S = u_3\left(\dfrac{1 - 2^8}{1 - 2}\right) = 1 \times 2^3\left(\dfrac{-255}{-1}\right) = 2\,040$.

24 En regroupant :

$$S = \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \cdots + \frac{9}{2}\right) + (1 + 2 + \cdots + 10)$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{9}{2}\right) \times 5}{2} + \frac{(1 + 10) \times 10}{2} = \frac{25}{2} + 55 = \frac{135}{2}.$$

★ **25** On reconnaît une suite géométrique de premier terme 0,02 et de raison -5.
Le dernier terme $u_n = 312{,}5 = u_0(-5)^n$ permet de trouver $(-5)^n = 15\,625$ ou $n = 6$.
Alors $S = 0{,}02\left(\dfrac{1 - (-5)^7}{1 - (-5)}\right) = 260{,}42$.

★ **26** **1.** $a = 2 + \sqrt{3}$ et $b = 2 - \sqrt{3}$.
2. $v_{n+1} = u_{n+2} - (2 + \sqrt{3})u_{n+1} = (4u_{n+1} - u_n) - (2 + \sqrt{3})u_{n+1}$
$= (2 - \sqrt{3})u_{n+1} - u_n = (2 - \sqrt{3})[u_{n+1} - (2 + \sqrt{3})u_n]$
$= (2 - \sqrt{3})v_n$.
(v_n) est géométrique de raison $2 - \sqrt{3}$ et de premier terme $v_0 = -2\sqrt{3}$.
3. De même, (w_0) est géométrique de raison $2 + \sqrt{3}$ et de premier terme $w_0 = 2\sqrt{3}$.
4. $v_n = -2\sqrt{3}\,(2 - \sqrt{3})^n$ et $w_n = 2\sqrt{3}\,(2 + \sqrt{3})^n$.

De $\begin{cases} v_n = u_{n+1} - a u_n \\ w_n = u_{n+1} - b u_n \end{cases}$, on déduit $v_n - w_n = (b - a)u_n$,

et, en définitive :

$u_n = \dfrac{1}{b - a}(v_n - w_n)$

$= \dfrac{1}{-2\sqrt{3}}[-2\sqrt{3}(2 - \sqrt{3})^n - 2\sqrt{3}(2 + \sqrt{3})^n]$

$= (2 - \sqrt{3})^n + (2 + \sqrt{3})^n$.

★ **27** Si on note q la raison, alors $a = \dfrac{b}{q}$ et $c = bq$ et les hypothèses donnent :

$$\begin{cases} b^3 = 343 \\ \dfrac{b}{q} + b + bq = 36{,}75 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} b = 7 \\ q^2 - 4{,}25q + 1 = 0 \end{cases}$$

Soit $q = 4$ ou $q = 0{,}25$. Les triplets solutions sont :
$(1{,}75 ; 7 ; 28)$ et $(28 ; 7 ; 1{,}75)$.

★ **28** *Corrigé dans le manuel.*

★★ **29** On a $b = aq$ et $c = aq^2$.
La seconde hypothèse permet d'écrire, en notant r la raison de la suite arithmétique, $2b = 3a + r$ et $c = 3a + 2r$.
D'où la relation $c = 3a + 2(2b - 3a) = 4b - 3a$, soit :
$aq^2 = 4aq - 3a$ ou $q^2 - 4q + 3 = 0$,
c'est-à-dire $q = 1$ ou $q = 3$.
Vérifions :
• si $q = 1$, (a, a, a) et $(3a, 2a, a)$ vérifient les hypothèses ;
• si $q = 3$, $(a, 3a, 9a)$ et $(3a, 2a, a)$ vérifient les hypothèses.

★★ **30** **1.** $P(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ et $a_n = P(n) = \alpha n^2 + \beta n + \gamma$.
Pour tout entier naturel n :

$$\alpha(n + 1)^2 + \beta(n + 1) + \gamma = \frac{1}{2}(\alpha n^2 + \beta n + \gamma) + n^2 + n$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\alpha}{2} - 1\right)n^2 + \left(2\alpha + \frac{\beta}{2} - 1\right)n + \left(\alpha + \beta + \frac{\gamma}{2}\right) = 0.$$

Le polynôme étant nul pour tout n, on obtient :

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha}{2} - 1 = 0 \\ 2\alpha + \dfrac{\beta}{2} - 1 = 0 \\ \alpha + \beta + \dfrac{\gamma}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = -6 \\ \gamma = 8 \end{cases} \text{ et } P(x) = 2x^2 - 6x + 8.$$

2. D'après la construction de la suite (a_n) :

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n + n^2 + n \,;$$

or $u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n + n^2 + n$, donc $u_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n - a_n)$ et (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = a - 8$.

3. On en déduit, pour tout entier n :

$$v_n = (a-8)\left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ et } u_n = (a-8)\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2n^2 - 6n + 8\,.$$

★★ **31** **3.** $v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{7}{4}(n+1) - \frac{7}{16}$

$$= 5u_n - 7n - \frac{7}{4}(n+1) - \frac{7}{16}$$

$$= 5\left(u_n - \frac{7}{4}n - \frac{7}{16}\right) = 5v_n\,;$$

(v_n) est une suite géométrique de raison 5 et de premier terme $v_0 = 5 - 0 - \frac{7}{16} = \frac{73}{16}$.

4. $v_n = \frac{73}{16}(5)^n$, puis $u_n = \frac{73}{16}(5^n) + \frac{7}{4}n + \frac{7}{16}$.

5. $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

$$= \frac{73}{16}(1 + 5 + \cdots + 5^n) + \frac{7}{4}(1 + \cdots + n) + \frac{7}{16}(1 + \cdots + 1)$$

$$= \frac{73}{16}\left(\frac{1-5^{n+1}}{1-5}\right) + \frac{7}{4}\left(\frac{(n+1)n}{2}\right) + \frac{7}{16}(n+1)$$

$$= \frac{73}{64}5^{n+1} + \frac{7}{8}n^2 + \frac{21}{16}n - \frac{45}{64}\,.$$

Démontrer des égalités, des inégalités

32 **1. a)** 1 ; 5 ; 14 ; 30.

b) $\Sigma_{n+1} = \Sigma_n + (n+1)^2$.

2. On note P_n la proposition « $\Sigma_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ».

• P_1 est vraie car $\frac{1(1+1)(2+1)}{6} = 1 = \Sigma_1$.

• On suppose que P_n est vraie. Alors :

$$\Sigma_{n+1} = \Sigma_n + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}\,.$$

On vérifie que $(n+2)(2n+3) = 2n^2 + 7n + 6$, et :

$$\Sigma_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6},$$

donc P_{n+1} est vraie.

Donc la proposition est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

★ **33** On note P_n la proposition :

« $1 + 2 \times 2! + \cdots + n \times n! = (n+1)! - 1$ ».

• P_1 est vraie car $1 = 1$ et $(1+1)! - 1 = 1$.

• On suppose que P_n est vraie. Alors :

$$\begin{aligned} &1 + 2\times 2! + \cdots + n \times n! + (n+1)\times(n+1)! \\ &= (n+1)! - 1 + (n+1)(n+1)! \\ &= (n+1)!\,[1 + (n+1)] - 1 = (n+1)!\,(n+2) - 1 \\ &= (n+2)! - 1\,. \end{aligned}$$

Donc P_{n+1} est également vraie.

• La proposition P_n est vraie pour tout entier n non nul.

★ **34** On note P_n la proposition « $S_n = T_n$ ».

• P_1 est vraie car $S_1 = 1 \times 2 = 2$ et $T_1 = \frac{1\times2\times3}{3} = 2$.

• On suppose que P_n est vraie et on calcule S_{n+1}.

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= 1\times2 + 2\times3 + \cdots + n(n+1) + (n+1)(n+2) \\ &= \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) + (n+1)(n+2) \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{3}(n+3) = T_{n+1}\,. \end{aligned}$$

Donc P_{n+1} est vraie.

• Et la proposition P_n est vraie pour tout entier n non nul.

★ **35** On note P_n la proposition :

« $1\times2\times3 + 2\times3\times4 + \cdots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$ ».

• P_1 est vraie car $1\times2\times3 = 6$ et $\frac{1\times2\times3\times4}{4} = 6$.

• On suppose que P_n est vraie. Alors :

$$\begin{aligned} &1\times2\times3 + \cdots + n(n+1)(n+2) + (n+1)(n+2)(n+3) \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} + (n+1)(n+2)(n+3) \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{4}(n+4)\,, \end{aligned}$$

et P_{n+1} est vraie.

• P_n est donc vraie pour tout entier n non nul.

36 Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on note P_n la proposition : « $S_n = (n-1)2^n - n2^{n-1} + 1$ ».

• P_2 est vraie puisque $S_2 = 1$ et $(2-1)2^2 - 2\times2^{2-1} + 1 = 1$.

• On suppose que P_n est vraie. Alors :

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= 1 + 2\times2 + \cdots + (n-1)2^{n-2} + n2^{n-1} \\ &= (n-1)2^n - n2^{n-1} + 1 + n2^{n-1} = (n-1)2^n + 1\,. \end{aligned}$$

Or on veut prouver que :

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= n2^{n+1} - (n+1)2^n + 1 \\ &= 2n\times2^n - n2^n - 2^n + 1 = (n-1)2^n + 1\,. \end{aligned}$$

Donc P_{n+1} est vraie.

• Et la propriété est vraie pour tout $n \geqslant 2$.

★ **37** Soit P_n la proposition : « $n! \geqslant 2^{n-1}$ ».

• P_1 est vraie car $1! = 1$ et $2^{n-1} = 1$.

• On suppose que P_n est vraie. Alors, pour tout $n \geqslant 1$:

$$(n+1)! = n!\,(n+1) \geqslant 2^{n-1}(n+1) \geqslant 2^{n-1}\times2 = 2^n\,.$$

Donc P_{n+1} est vraie.

• P_n est donc vraie pour tout $n \geqslant 1$.

Remarque : Il y a $(n-1)$ facteurs, dans le membre de gauche, supérieurs à 2 donc en multipliant…

38 On note P_n la proposition : « $(1+a)^n \geqslant 1+na$ ».

- P_0 est vraie puisque $(1+a)^0 = 1$ et $1 + 0 \times a = 1$.
- On suppose que P_n est vraie. Alors :

$$(1+a)^{n+1} = (1+a)(1+a)^n \geqslant (1+a)(1+na)$$
$$= 1 + a + na + na^2 \geqslant 1 + (n+1)a.$$

P_{n+1} est vraie.

- P_n est donc vraie pour tout entier n.

39 **1.** On note Q_n la proposition : « $3n^2 \geqslant (n+1)^2$ ».

- P_2 est vraie car $3 \times 2^2 = 12$ et $(2+1)^2 = 9$.
- On suppose que Q_n est vraie, alors :

$$3(n+1)^2 = 3n^2 + 6n + 3 \geqslant (n+1)^2 + 6n + 3 = n^2 + 8n + 4$$
$$\geqslant n^2 + 4n + 4 = (n+2)^2.$$

Q_{n+1} est vraie.

- Pour tout $n \geqslant 2$, Q_n est vraie.

2. a) Notons P_n la proposition : « $3^n \geqslant 2^n + 5n^2$ ».

- Pour $n = 1$, $3 \geqslant 2 + 5$ est fausse.
- Pour $n = 2$, $9 \geqslant 4 + 20$ est fausse.
- Pour $n = 3$, $27 \geqslant 8 + 45$ est fausse.
- Pour $n = 4$, $81 \geqslant 16 + 80$ est fausse.
- Pour $n = 5$, $243 \geqslant 32 + 125$ est vraie.

$n = 5$ est donc la plus petite valeur non nulle pour laquelle P_n est vraie.

b) Supposons que pour $n \geqslant 5$, P_n est vraie et cherchons à savoir si P_{n+1} est vraie.

$$3^{n+1} = 3 \times 3^n \geqslant 3(2^n + 5n^2) \geqslant 2 \times 2^n + 5 \times 3n^2,$$

et d'après le **1.**, $3n^2 \geqslant (n+1)^2$.

D'où $3^{n+1} \geqslant 2^{n+1} + 5(n+1)^2$ et P_{n+1} est vraie.

- P_n est donc vraie pour tout $n \geqslant 5$.

40 **1.** • $3^0 = 1$ et $(0+2)^2 = 4$ donc P_0 est fausse.

- $3^1 = 3$ et $(1+2)^2 = 9$ donc P_1 est fausse.
- $3^2 = 9$ et $(2+2)^2 = 16$ donc P_2 est fausse.
- $3^3 = 27$ et $(5+2)^2 = 25$ donc P_3 est vraie.

2. • $n \geqslant 3$; on suppose que P_n est vraie. Alors :

$$3^{n+1} = 3^n \times 3 \geqslant 3(n+2)^2 = 3n^2 + 12n + 12.$$

Il reste donc à prouver que :

$$3n^2 + 12n + 12 \geqslant (n+3)^2 \text{ ou } 2n^2 + 6n + 3 \geqslant 0,$$

ce qui est vérifié pour $n \geqslant 3$. Donc P_{n+1} est vraie.

- Pour tout $n \geqslant 3$, $3n \geqslant (n+2)^2$.

Conjecturer puis démontrer

41 ***Pour apprendre à chercher***

Les outils :

- Raisonnement par récurrence.

Les objectifs :

- Savoir conjecturer une propriété après le calcul des premiers termes.
- Savoir prouver la conjecture.

1. $u_0 = 7$; $u_1 = 52$; $u_2 = 502$; $u_3 = 5\,0002$; $u_4 = 50\,002$; $u_5 = 500\,002$.

2. Lorsque n prend les valeurs $1, 2, 3, \ldots,$ il y a $0, 1, 2, \ldots,$ zéros entre le 5 et le 2.

3. a) En fait, on peut écrire pour $n = 1, 2, 3, 4, 5$:

$$u_n = 5 \times 10^n + 2.$$

b) On suppose que cette proposition est vraie au rang n.

Alors $u_{n+1} = 10u_n - 18 = 10(5 \times 10^n + 2) - 18$
$= 5 \times 10^{n+1} + 2.$

P_{n+1} est vraie et la proposition est vraie pour tout n.

42 **1.** • $u_0 = 2$; $u_1 = 1$; $u_2 = -1$; $u_3 = -5$; $u_4 = -13$; $u_5 = -29$.

- $u_1 - 3 = -2$; $u_2 - 3 = -4$; $u_3 - 3 = -8$; $u_4 - 3 = -16$; $u_5 - 3 = -32$.

Il semble donc que $u_n = 3 - 2^n$.

2. $u_{n+1} - 3 = (2u_n - 3) - 3 = 2u_n - 6 = 2(u_n - 3)$.

La suite $(u_n - 3)$ est géométrique de raison 2 et de premier terme -1.

Donc $u_n - 3 = -1 \times 2^n \Rightarrow 3 - 2^n = u_n$ pour tout entier naturel n.

43 **1.** $u_0 = 3$; $u_1 = 1$; $u_2 = 3$; $u_3 = 1$; $u_4 = 3$; $u_5 = 1$.

Il semble donc que lorsque n est pair, $u_n = 3$ et lorsque n est impair, $u_n = 1$.

2. Posons P_n la proposition : « $u_{2n} = 3$ et $u_{2n+1} = 1$ ».

P_0, P_1, P_2 sont vraies. On suppose que P_n est vraie.

Alors $\begin{cases} u_{2n+2} = -u_{2n+1} + 4 = 3 \\ u_{2n+3} = -u_{2n+2} + 4 = 1 \end{cases}$ et P_{n+1} est vraie.

La proposition P_n est vraie pour tout entier naturel n.

44 *Corrigé dans le manuel.*

Divisibilité

45 • P_0 est vraie car $4^0 + 5 = 6$.

- On suppose que P_n est vraie, c'est-à-dire que $4^n + 5 = 3p$, p entier.

$$4^{n+1} + 5 = 4(4^n) + 5 = 4(3p - 5) + 5$$
$$= 12p - 15 = 3(4p - 5),$$

ce qui prouve que $4^{n+1} + 5$ est un multiple de 3.

P_{n+1} est donc vraie.

- Pour tout entier naturel n, $4^n + 5$ est un multiple de 3.

46 **1.** Si on suppose que P_n est vraie pour un entier n, alors $10^{n+1} + 1 = 10(10^n) + 1 = 10(9p - 1) + 1$
$= 90p - 9 = 9(10p - 1)$,

donc $10^{n+1} + 1$ est un multiple de 9 et P_{n+1} est vraie.

2. Pourtant $10^n + 1$ s'écrit $1\underbrace{0 \dots 0}_{(n-1)\text{ zéros}}1$ ·

Et comme la somme des chiffres est 2, le nombre n'est pas divisible par 9. Donc P_n n'est jamais vraie.

★ **47** Soit P_n la proposition : « $2^{3n} - 1$ est un multiple de 7 ».

- P_0 est vraie puisque $2^{2\times 0} - 1 = 0$.
- On suppose que P_n est vraie pour un certain n. Alors :

$$2^{3(n+1)} - 1 = 2^{3n} \times 2^3 - 1 = 8(7p+1) - 1 \qquad (p \in \mathbb{Z})$$
$$= 56p + 7 = 7(8p+1).$$

$2^{3(n+1)} - 1$ est un multiple de 7 et P_{n+1} est vraie.

- La propriété P_n est donc vraie pour tout entier naturel n.

★ **48** *Corrigé dans le manuel.*

★★ **49** P_0 est vraie car $3^1 + 2^2$ est égal à 7.

- P_n est supposée vraie, pour un entier $n \geqslant 0$.

Il s'agit de prouver que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire que :

$$3^{2(n+1)+1} + 2^{(n+1)+2} = 3^{2n+3} + 2^{n+3}$$

est un multiple de 7. Soit encore :

$3^{2n+3} + 2^{n+3} - (3^{2n+1} + 2^{n+2})$ est multiple de 7,
$3^{2n+1}(3^2 - 1) + 2^{n+2}(2-1)$ est multiple de 7,
$3^{2n+1}(8) + 2^{n+2}(1)$ est multiple de 7,
$7(3^{2n+1}) + 3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est multiple de 7,

ce qui est vrai par hypothèse de récurrence.

Donc P_{n+1} est vraie et la proposition P_n est vraie pour tout n.

Divers

★ **50** **1.** Soit P_n la proposition : « $0 \leqslant u_n \leqslant 2$ ».

- P_0 est vraie car $u_0 = 1$.
- On suppose que P_n, soit $0 \leqslant u_n \leqslant 2$, alors :

$$\sqrt{2} \leqslant \sqrt{u_n + 2} \leqslant \sqrt{4}.$$

On a bien $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$, P_{n+1} est vraie.

- Pour tout entier naturel n, P_n est vraie.

2. $$u_{n+1} - u_n = \sqrt{2 + u_n} - u_n = \frac{2 + u_n - u_n^2}{\sqrt{2+u_n} + u_n}$$
$$= \frac{(2-u_n)(1+u_n)}{\sqrt{2+u_n} + u_n}.$$

Ce quotient est positif car $0 \leqslant u_n \leqslant 2$ et (u_n) est croissante.

★ **51** On note P_n la proposition : « $0 \leqslant u_n \leqslant 1$ ».

1. • P_0 est vraie puisque $u_0 = 1$.

- On suppose que P_n est vraie pour un entier $n \geqslant 0$.

Alors $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 1}{u_n + 3} \geqslant 0$.

D'autre part $u_{n+1} - 1 = \dfrac{-2}{u_n + 3} \leqslant 0$.

La propriété P_{n+1} est vraie.

- La propriété est donc vraie pour tout entier naturel n.

2. • $u_0 = 1$, $u_1 = \dfrac{1}{2}$ donc $u_1 \leqslant u_0$.

- On suppose que $u_{n+1} \leqslant u_n$.

Comme la fonction $x \mapsto f(x) = \dfrac{x+1}{x+3}$ est croissante $\left(f'(x) = \dfrac{2}{(x+1)^2} > 0\right)$, $f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n)$, soit $u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$ et la suite (u_n) est décroissante.

★★ **52** Dans cette « démonstration », si on prend un groupe de deux personnes A_1, F, le raisonnement ne peut pas s'appliquer : le groupe formé de A_1 ne contient peut-être pas de femme.

★★ **53** On note P_n la proposition : « il existe p_n, q_n entiers tels que $(2+\sqrt{3})^n = p_n + q_n\sqrt{3}$ ».

- P_1 est vraie, en prenant $p_1 = 2$ et $q_1 = 1$:

$$(2+\sqrt{3})^1 = 2 + \sqrt{3}.$$

- On suppose que P_n est vraie. Alors :

$$(2+\sqrt{3})^{n+1} = (2+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^n$$
$$= (2+\sqrt{3})(p_n + q_n\sqrt{3})$$
$$= (2p_n + 3q_n) + (2q_n + p_n)\sqrt{3}.$$

Les nombres $2p_n + 3q_n$ et $2q_n + p_n$ sont des entiers, donc P_{n+1} est vraie.

- P_n est donc vraie pour tout entier $n \geqslant 1$.

★★ **54** **1.** $u_0 = 2\cos\theta$;

$$u_1 = \sqrt{2 + 2\cos\theta} = \sqrt{2 + 2\left(2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1\right)}$$
$$= \sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2}} = 2\cos\frac{\theta}{2}, \text{ car } \frac{\theta}{2} \in \left]0 ; \frac{\pi}{2}\right[;$$
$$u_2 = \sqrt{2 + 2\cos\frac{\theta}{2}} = \sqrt{2 + 2\left(2\cos^2\frac{\theta}{4} - 1\right)}$$
$$= \sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{4}} = 2\cos\frac{\theta}{4}, \text{ car } \frac{\theta}{4} \in \left]0 ; \frac{\pi}{2}\right[;$$

2. On note P_n la proposition : « $u_n = 2\cos\left(\dfrac{\theta}{2^n}\right)$ ».

- P_1 est vraie.
- On suppose que P_n est vraie. Alors :

$$u_{n+1} = \sqrt{2 + 2\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)} = \sqrt{2 + 2\left(2\cos^2\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right) - 1\right)}$$
$$= \sqrt{4\cos^2\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right),$$

car $\dfrac{\theta}{2^{n+1}} \in \left]0 ; \dfrac{\pi}{2}\right[$. P_{n+1} est vraie.

- Donc pour tout entier naturel n, $u_n = 2\cos\left(\dfrac{\theta}{2^n}\right)$.

★★**55** Notons P_n la proposition : « S_n est un élément de $\mathcal{H}$ et a des coordonnées entières » .

• $S_1(1 ; 0)$ a des coordonnées entières et $1^2 - 5\times 0^2 = 1$, donc S_1 est un élément de $\mathcal{H}$.

• Supposons que P_n est vraie. Alors les coordonnées :

$$(x_{n+1} ; y_{n+1}) = (9x_n + 20y_n ; 4x_n + 9y_n),$$

de S_{n+1} sont entières puisque x_n et y_n sont des entiers.

De plus :

$$\begin{aligned} x_{n+1}^2 - 5y_{n+1}^2 &= (9x_n + 20y_n)^2 - 5(4x_n + 9y_n)^2 \\ &= (81x_n^2 + 360x_ny_n + 400y_n^2) - 5(16x_n^2 + 72x_ny_n + 81y_n^2) \\ &= x_n^2 - 5y_n^2 = 1, \end{aligned}$$

donc S_{n+1} est un élément de $\mathcal{H}$.

• La propriété est donc vraie pour tout entier naturel n.

★★**56** **1.** $\begin{cases} \sin(a+b) = \sin a\cos b + \sin b\cos a \\ \sin(a-b) = \sin a\cos b - \sin b\cos a \end{cases}$

donc, en ajoutant membre à membre :

$$\sin a\cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)].$$

En faisant $a = b$, il vient $\sin 2a = 2\sin a\cos a$.

2. $\begin{cases} \sin x\cos(2n+1)x = \frac{1}{2}[\sin(2n+2)x - \sin 2nx] \\ \sin nx\cos nx = \frac{1}{2}\sin 2nx \end{cases}$

3. On note P_n la proposition : « $C_n = \cos nx \dfrac{\sin nx}{\sin x}$ » .

• P_1 est vraie car $C_1 = \cos x$ et $\cos x\dfrac{\sin x}{\sin x} = \cos x$.

• On suppose que P_n est vraie pour $n \geqslant 1$. Alors :

$$\begin{aligned} C_{n+1} &= \cos x + \ldots + \cos(2n-1)x + \cos(2n+1)x \\ &= \cos nx\frac{\sin nx}{\sin x} + \cos(2n+1)x \\ &= \frac{\cos nx\sin nx + \cos(2n+1)x\sin x}{\sin x} \\ &= \frac{\frac{1}{2}\sin 2nx + \frac{1}{2}[\sin(2n+2)x - \sin 2nx]}{\sin x} \\ &= \frac{\frac{1}{2}\sin(2n+2)x}{\sin x} = \frac{\sin(n+1)x}{\sin x}\cos(n+1)x. \end{aligned}$$

P_{n+1} est vraie.

• La proposition P_n est vraie pour $n \geqslant 1$.

★★**57** **1.** $D_3 = 0$; $D_4 = 2$; $D_5 = 5$; $D_6 = 9$.

2. $a = \dfrac{1}{2}$ et $b = -\dfrac{3}{2}$; pour $0 \leqslant n \leqslant 6$, $D_n = \dfrac{n^2 - 3n}{2}$.

3. a) $D_{n+1} = D_n + 1 + (n-2)$, soit $D_{n+1} = D_n + n - 1$.

b) La relation du **2.** est vérifiée au départ pour $n = 3$.
Supposons la relation vraie pour $n \geqslant 3$. Alors :

$$\begin{aligned} D_{n+1} &= D_n + (n-1) \\ &= \frac{n^2 - 3n}{2} + n - 1 = \frac{(n+1)^2 - 3(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

Et $D_n = \dfrac{n^2 - 3n}{2}$ est vraie pour tout n .

★★**58** **1.** $Q_1(x) = x$; $Q_2(x) = x(x+1)$;
$Q_3(x) = x[(x+1)(x+2)]$.

2. Il semble que $Q_n(x) = x(x+1)\ldots(x+n-1)$.

On suppose que cette proposition est vraie. Alors :

$$\begin{aligned} Q_{n+1}(x) &= x[(x+1)(x+2)\ldots(x+1+n-1)] \\ &= x(x+1)\ldots(x+n). \end{aligned}$$

Donc la propriété est vraie pour tout entier n non nul.

★★**59** **A. 1.** $u_3 = 5$, $u_4 = 7$, $u_5 = 9$.

Il semble que $u_n = 2n - 1$ pour $n \geqslant 1$.

2. Cette proposition est vraie pour $1, 2, 3$.

• Si elle est vraie pour u_n et u_{n+1} , $n \geqslant 1$, alors :

$$u_{n+2} = 2(2n+1) - (2n-1) = 2n + 3.$$

• La proposition est vraie pour u_{n+2} et donc vraie pour tout n .

B. • P_n est vraie pour $n = 0$ et $n = 1$.

• On suppose que P_n est vraie jusqu'au rang $n + 1$. Alors :

$$u_{n+2} = 5\left(\frac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{5}\right) - 6\left(\frac{2^n + 3^n}{5}\right) = \frac{2^{n+2} + 3^{n+2}}{5},$$

et P_{n+2} est vraie.

pour chercher plus (page 22)

1. • $F(0) = F(0^2 + 0^2) = 2F^2(0)$,
d'où $F(0)(1 - 2F(0)) = 0$, d'où $\mathbf{F(0) = 0}$, car $F(0) \in \mathbb{N}$.
• $F(1) = F(0^2 + 1^2) = F^2(1)$,
d'où $F(1)(1 - F(1)) = 0$, d'où $\mathbf{F(1) = 1}$, car $F(1) > 0$.
• $F(2) = F(1^2 + 1^2) = 2F^2(1) = 2$; $\mathbf{F(2) = 2}$.
• $F(4) = F(0^2 + 2^2) = F^2(2) = 2^2$; $\mathbf{F(4) = 4}$.
• $F(8) = F(2^2 + 2^2) = 2F^2(2) = 8$; $\mathbf{F(8) = 8}$.
• $F(5) = F(2^2 + 1^2) = F^2(2) + F^2(1) = 5$; $\mathbf{F(5) = 5}$.
• $F(25) = F(0^2 + 5^2) = F^2(5) = 25$,
et $F(25) = F(3^2 + 4^2) = F^2(3) + F^2(4)$
$\Rightarrow$ $F^2(3) = 9$ et $\mathbf{F(3) = 3}$.
• $F(9) = F(3^2 + 0^2) = F^2(3) = 9$; $\mathbf{F(9) = 9}$.
• $F(10) = F(3^2 + 1^2) = F^2(3) + F^2(1) = 10$; $\mathbf{F(10) = 10}$.
• $F(100) = F(0^2 + 10^2) = F^2(10) = 100$,
et $F(100) = F(8^2 + 6^2) = F^2(8) + F^2(6)$
$\Rightarrow$ $F^2(6) = 36$ et $\mathbf{F(6) = 6}$.
• $F(50) = F(5^2 + 5^2) = 2F^2(5) = 50$,
et $F(50) = F(7^2 + 1^2) = F^2(7) + F^2(1)$
$\Rightarrow$ $F^2(7) = 49$ et $\mathbf{F(7) = 7}$.
• $F(145) = F(8^2 + 9^2) = F^2(8) + F^2(9) = 145$ et
$F(145) = F(12^2 + 1^2) = F^2(12) + F^2(1)$, donc $\mathbf{F(12) = 12}$.
• $F(125) = F(10^2 + 5^2) = F^2(10) + F^2(5) = 125$
et $F(125) = F(11^2 + 2^2) = F^2(11) + F^2(2)$ $\Rightarrow$ $\mathbf{F(11) = 11}$.

2. La conjecture est évidente : pour tout entier n, $F(n) = n$.

Question : Pour tout entier n non nul, existe-t-il des entiers a, b, c tels que $n^2 + a^2 = b^2 + c^2$ avec a, b, c strictement inférieurs à n ? Si oui, la récurrence pourra opérer (en utilisant $F(m^2 + n^2) = [F(m)]^2 + [F(n)]^2$).

Posons $n = 4k + u$ avec $u \in \{1, 2, 3, 4\}$ et $k \in \mathbb{N}$.
$(4k + u)^2 + (2k - 2u)^2 = (4k - u)^2 + (2k + 2u)^2$.

Les conditions imposées à a, b, c se traduisent par :
• $2k - 2u < 4k + u$ (vrai),
• $4k - u < 4k + u$ (vrai),
• $2k + 2u < 4k + u \Leftrightarrow k > \frac{u}{2}$.

Ainsi, il suffit que $k \geqslant 3$ pour que ces conditions soient satisfaites. Pour tout entier $n \geqslant 13$, l'existence de la décomposition cherchée est assurée.

Prouvons alors par récurrence la proposition P_n : « pour tout $k \leqslant n$, $F(k) = k$ ».

• P_{13} est vraie. En effet, $F(k) = k$ pour $0 \leqslant k \leqslant 12$.
De plus, $13^2 + 4^2 = 11^2 + 8^2$, donc :
$$F^2(13) + F^2(4) = F^2(11) + F^2(8) \Rightarrow F(13) = 13.$$

• Supposons P_n vraie pour un entier $n \geqslant 13$. Alors, il existe des entiers a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1} strictement inférieurs à $n + 1$, tels que :
$$(n+1)^2 + a_{n+1}^2 = b_{n+1}^2 + c_{n+1}^2.$$

D'où, en appliquant F :
$$F^2(n+1) + F^2(a_{n+1}) = F^2(b_{n+1}) + F^2(c_{n+1}),$$

et en utilisant l'hypothèse :
$$F^2(n+1) = b_{n+1}^2 + c_{n+1}^2 - a_{n+1}^2 = (n+1)^2.$$

Donc $F(n + 1) = n + 1$. D'où le résultat.