Les fonctions puissances Croissances comparées

Travaux dirigés (page 187)

TD 1

2 **1. a)** Pour $m < 0$, $\lim\limits_{x \to 0} f_m(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f_m(x) = 0$.

b) Pour $m > 0$, $\lim\limits_{x \to 0} f_m(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f_m(x) = +\infty$.

2. a) $f_m = \exp \circ u$ avec $u(x) = m\ln x$, donc f_m est dérivable sur I.

b) $f'_m(x) = \dfrac{m}{x}\mathrm{e}^{m\ln x}$;

si $m > 0$, $f'_m(x) > 0$ et si $m < 0$, $f'_m(x) < 0$.

c) • *m* < 0

x	0		$+\infty$
$f'_m(x)$		$-$	
f_m	$+\infty$	↘	0

• *m* > 0

x	0		$+\infty$
$f'_m(x)$		$+$	
f_m	0	↗	$+\infty$

3. a) Pour tout réel $x > 0$,

$$\tau_m(x) = \frac{g_m(x) - g_m(0)}{x} = \frac{\mathrm{e}^{m\ln x}}{\mathrm{e}^{\ln x}} = \mathrm{e}^{(m-1)\ln x}.$$

b) • Si $m > 1$, $\lim\limits_{x \to 0} \tau_m(x) = 0$. Donc g_m est dérivable en 0 et l'axe des abscisses est la tangente à $\mathscr{C}_{g_m}$ en $x = 0$.

• Si $0 < m < 1$, $\lim\limits_{x \to 0} \tau_m(x) = +\infty$. Donc g_m n'est pas dérivable en 0 et l'axe des ordonnées est la tangente à $\mathscr{C}_{g_m}$ à l'origine du repère.

TD 2

2 **1.** f est définie sur $\mathrm{I} =]0\,; +\infty[$ par $f(x) = \mathrm{e}^{x\ln x}$.

2. • $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$;

• $\lim\limits_{x \to 0} x\ln x = 0$, donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$.

3. a) Pour tout x de I, $f'(x) = (1 + \ln x)\mathrm{e}^{x\ln x}$.

b)

x	0		$\frac{1}{\mathrm{e}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	1	↘	$\mathrm{e}^{-\frac{1}{\mathrm{e}}}$	↗	$+\infty$

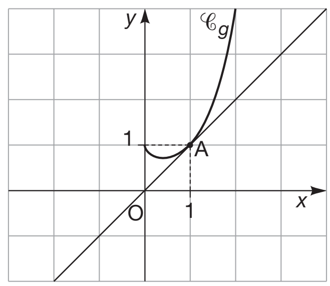
• $\mathrm{e}^{-\frac{1}{\mathrm{e}}} \approx 0{,}69$.

4. a) Pour tout $x > 0$, $t(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x\ln x} - 1}{x} = \dfrac{\mathrm{e}^{x\ln x} - 1}{x\ln x} \times \ln x$.

b) Posons $\mathrm{X} = x\ln x$, $\lim\limits_{x \to 0} \mathrm{X} = 0$ et $\lim\limits_{\mathrm{X} \to 0} \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{X}} - 1}{\mathrm{X}} = 1$,

donc $\lim\limits_{x \to 0} t(x) = -\infty$.

c) Donc la courbe représentative de g admet pour tangente en $(0\,; 1)$ l'axe des ordonnées.
$g(1) = f(1) = 1$ et $g'(1) = f'(1) = 1$ donc la tangente en $\mathrm{A}(1\,; 1)$ a pour équation $y - 1 = 1(x - 1)$ ou $y = x$.



TD 3

1 **1.** Immédiat.

2. a) • $\left(\dfrac{2}{5}\right)^x = \mathrm{e}^{x\ln\frac{2}{5}}$, et si $f(x) = \mathrm{e}^{x\ln\frac{2}{5}}$,

$$f'(x) = \ln\frac{2}{5}\,\mathrm{e}^{x\ln\frac{2}{5}} < 0.$$

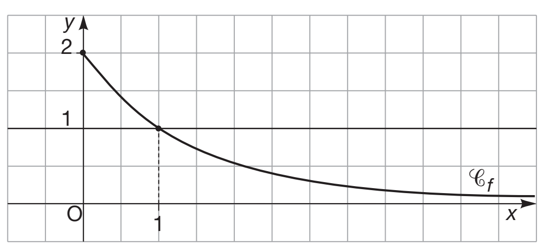
Donc les fonctions $x \mapsto \left(\dfrac{2}{5}\right)^x$ et $x \mapsto \left(\dfrac{3}{5}\right)^x$ sont strictement décroissantes sur $[0\,; +\infty[$.

• $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2}{5}\right)^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{3}{5}\right)^x = 0$.

b)

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$			$-$		
f	2	↘	1	↘	0

Donc l'équation a une solution et une seule strictement positive qui est $x = 1$.



2 **1.** $x^5 = e^{5\ln x}$ et $(2{,}5)^x = e^{x\ln(2{,}5)}$, donc $x^5 = (2{,}5)^x$ équivaut à $5\ln x = x\ln 2{,}5$. Puisque $x > 0$, cela équivaut à $\dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{\ln 2{,}5}{5}$.

2. a) $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$.

b) • $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$;

• $f'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$;

x	0	1	e	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
f	$-\infty$ ↗	0 ↗	$\frac{1}{e}$ ↘	0

$\dfrac{\ln 2{,}5}{5} \approx 0{,}18$, donc l'équation a deux solutions strictement positives et deux seulement, α et β, telles que $1 < \alpha < e$ et $\beta > e$.

c) $1{,}25 < \alpha < 1{,}26$ et $14{,}64 < \beta < 14{,}65$.

Corrigés des exercices

maîtriser le cours (page 190)

1. Les fonctions $x \mapsto x^n$, n entier non nul

1 **1.** $1 + x + \cdots + x^{n-1} = \dfrac{1 - x^n}{1 - x}$ [1].

2. On pose $f(x) = 1 + x + \cdots + x^{n-1}$, donc :

$$f'(x) = 1 + 2x + \ldots + (n-1)x^{n-2} = S.$$

Or, d'après [1],

$$f'(x) = \frac{-(1-x)nx^{n-1} + 1 - x^n}{(1-x)^2} = \frac{-nx^{n-1} + nx^n + 1 - x^n}{(1-x)^2},$$

d'où $S = \dfrac{(n-1)x^n - nx^{n-1} + 1}{(1-x)^2}$.

2 • $f^{(1)} = \dfrac{-1}{x^2}$ qui est de la forme $\dfrac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$ avec $n = 1$.

• Si $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$, alors :

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^n n! \frac{-(n+1)}{x^{n+2}} = \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{x^{n+2}}.$$

Donc pour tout $n \geqslant 1$, $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$.

2. La fonction racine n-ième

3 A = 16 ; $B = (2^5)\sqrt[6]{2}$. **4** A = 1 ; B = 0.

5 *Corrigé dans le manuel.*

6 $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}} = \dfrac{(\sqrt[3]{3})^2 + \sqrt[3]{3}\sqrt[3]{2} + (\sqrt[3]{2})^2}{(\sqrt[3]{3})^3 - (\sqrt[3]{2})^3} = 3^{\frac{2}{3}} + 6^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{2}{3}}$.

7 *Corrigé dans le manuel.*

8 $A = x^{-\frac{19}{3}}$; $B = x^{\frac{1}{4}}$. **9** $A = x^{\frac{13}{6}}$; $B = x^{-\frac{7}{6}}$.

10 *Corrigé dans le manuel.*

11 a) $x^{\frac{2}{3}}\left(1 - x^{\frac{1}{3}}\right) < 0$ avec $x > 0$, d'où $x > 1$.

b) $x^{\frac{4}{3}} \geqslant \dfrac{1}{2}$, d'où $x \geqslant 2^{-\frac{3}{4}}$.

12 a) $x > -1$ et $x \leqslant 0$, d'où $\mathcal{S} =]-1\,;0]$.

b) $0 < x \leqslant 8\sqrt{2}$.

13 *Corrigé dans le manuel.*

14 a) $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}$. **b)** $f'(x) = -\dfrac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}$.

15 a) $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$. **b)** $f'(x) = 2x^{-\frac{1}{3}}$.

16 $g : x \mapsto \sqrt[3]{x}$ et $h : x \mapsto x^2 + 1$; $f = g \circ h$, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $f'(x) = \dfrac{2x}{3(1 + x^2)^{\frac{2}{3}}}$.

17 **1.** f est le produit de fonctions dérivables sur $]0\,;+\infty[$.

2. $f'(x) = \dfrac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}e^{-x} - x^{\frac{5}{3}}e^{-x} = x^{\frac{2}{3}}e^{-x}\left[\dfrac{5}{3} - x\right]$. Donc $f'(x)$ a le même signe que $\dfrac{5}{3} - x$.

18 Pour tout x de I, $f'(x) = -\dfrac{3}{2}(1-x)^{\frac{1}{2}}$ donc $f'(x) < 0$.

3. Croissances comparées

19 a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$; **b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$;

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

20 a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; **b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

21 a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; **b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

22 *Corrigé dans le manuel.*