# Chapitre 9

# Éléments de combinatoire

## Pour prendre un bon départ (page 242)

### Activité 1

**2** **1.** • Résultats :

PPP, PPF, PFP, FPP, PFF, FPF, FFP, FFF .

Huit résultats.

• $2 \times 2 \times 2 = 8$ .

**2. a)** Il y a deux choix pour remplir la case 1, et pour chacun de ces choix, il y a deux choix pour remplir la case 2.

Donc $2 \times 2 = 4$ façons de remplir les deux premières cases.

Pour chacune de ces façons, il y a deux façons de remplir la case 3.

**b)** Donc $4 \times 2$ façons de remplir les trois cases.

**3. Exercices**

**1.** On trouve $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ pour l'exemple 2 et $5 \times 4 \times 3 = 60$ pour l'exemple 3.

**2.** $9 \times 1 \times 9 \times 9 = 729$ .

### Activité 2

**1.** Chaque résultat est représenté par un ensemble de trois cases choisies parmi les 5 .

**2. a)** $n_1 = 5 \times 4 \times 3$ . **b)** $n_2 = 3 \times 2 \times 1$ .

**c)** Pour chaque ensemble (au nombre de $\binom{5}{3}$), on associe $n_2$ listes différentes. D'où le résultat.

Et on obtient $\binom{5}{3} = 10$ .

## Travaux dirigés (page 251)

### TD 1

**1** **1.** $4 \times 4 \times 4 = 64$ .

**2. a)** $1 \times 1 \times 1 = 1$ ;

**b)** $1 \times 1 \times 4 = 4$ ;

**c)** $4 \times 1 \times 1 = 4$ ;

**d)** $4 \times 1 \times 4 = 16$ .

**2** **1.** $4 \times 3 \times 2 = 24$ .

**2. a)** $1 \times 1 \times 1 = 1$ ;

**b)** $1 \times 1 \times 2 = 2$ ;

**c)** $2 \times 1 \times 1 = 2$ ;

**d)** $3 \times 1 \times 2 = 6$ .

**3** **1.** $\binom{4}{3} = 4$ .

**2.** $\binom{1}{1} \times \binom{3}{2} = 3$ ; $\binom{2}{2} \times \binom{2}{1} = 2$ .

### TD 2

**1** **1.** Main obtenue deux fois par ce procédé : roi de carreau, puis roi de trèfle, as de carreau, as de trèfle et 10 de pique.

En effet, cette main peut aussi être obtenue en choisissant d'abord le roi de trèfle, puis le roi de carreau et as de carreau, as de trèfle et 10 de pique. Ici, il faut dénombrer en distinguant les ensembles contenant exactement un roi, puis deux rois, trois rois, et enfin quatre rois.

Il est plus simple de dénombrer l'ensemble complémentaire, c'est-à-dire les mains n'ayant pas de roi.

D'où le résultat $\binom{32}{5} - \binom{28}{5} = 103\,096$ .

**2. a)** Il faut tenir compte de l'as de cœur, qui possède les deux qualités. Il y a deux possibilités :

– soit on prend l'as de cœur et il faut prendre un as qui ne soit pas de cœur (il y en a trois) et trois autres cartes qui ne soient ni un as, ni un cœur (il y en a vingt-et-une) ;

– soit on prend deux as qui ne sont pas l'as de cœur, un cœur qui ne soit pas un as et deux autres cartes qui ne soient ni un as ni un cœur.

On obtient :

$$\binom{1}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{21}{3} + \binom{3}{2} \times \binom{7}{1} \times \binom{21}{2} = 3\,990 + 4\,410 = 8\,400 .$$

**b)** En prodédant de façon identique :

$$\binom{1}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{7}{2} \times \binom{21}{1} + \binom{3}{2} \times \binom{7}{3} = 1\,428 .$$

**2** **1. a)** $10^4 = 10\,000$ ; $9^4 = 6\,561$ .

**b)** $10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5\,040$ .

**2. a)** Il y a $\dfrac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2} = 12$ codes (la division par 2 est due à la présence des deux 9).

**b)** Le temps d'attente après le $n$-ième essai est de $2^n$ .

On est amené à calculer :

$$2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} = 2(2^{n-1} - 1) ,$$

et à résoudre $2(2^{n-1} - 1) \leqslant 24 \times 60$ .

On trouve $n \leqslant 10$ , donc on pourra faire dix essais au maximum en vingt-quatre heures.