TD 2

1. E(X) = 597,4 et V(X) = 99,24.

2. a) $(0{,}45)^{10} \approx 0{,}00034$.

b) Le nombre de pains de poids inférieur à 585 g suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0{,}12$.

$$p(X \leqslant 2) = (0{,}88)^{10} + 10 \times (0{,}88)^9 \times 0{,}12 + 45 \times (0{,}88)^8 \times (0{,}12)^2 \approx 0{,}89.$$

TD 3

1. S (succès) a pour probabilité $\frac{1}{3}$.

2. Les épreuves sont indépendantes, et pour chacune d'elles, $p = \frac{1}{3}$ est constante.

Donc, puisqu'il y a treize épreuves successives indépendantes, le nombre de bonnes réponses suit une loi de binomiale de taille 13 avec $p = \frac{1}{3}$.

3. $p(X \geqslant 10) = p(X = 10) + p(X = 11) + p(X = 12) + p(X = 13)$

$$= \binom{13}{10}\left(\frac{1}{3}\right)^{10}\left(\frac{2}{3}\right)^{3} + \binom{13}{11}\left(\frac{1}{3}\right)^{11} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{2} + \binom{13}{12}\left(\frac{1}{3}\right)^{12} \times \left(\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^{13}.$$

À 10^{-4} près, on obtient : 0,001 6.

TD 4

1. $p(X = 1) = \frac{1}{6}$;

$p(X = 2) = \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{5}{6^2}$;

$p(X = 3) = \left(\frac{5}{6}\right)^2 \times \frac{1}{6} = \frac{5^2}{6^3}$.

2. $p(X = k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \times \frac{1}{6} = \frac{5^{k-1}}{6^k}$.

3. $p(X \leqslant k) = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} + \ldots + \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \times \frac{1}{6}$

$$= \frac{1}{6} \times \frac{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^k}{\frac{1}{6}} = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^k.$$

4. $\lim\limits_{k \to +\infty} p(X \leqslant k) = 1$.

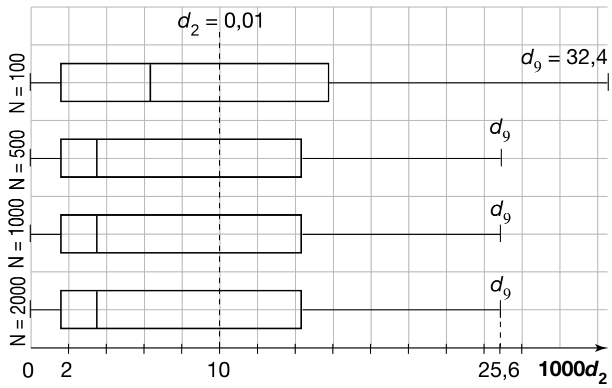
5. Résolvons $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^k > 0{,}99 \Leftrightarrow k > \dfrac{\ln 0{,}01}{\ln \frac{5}{6}}$.

Donc la plus petite valeur de k est 26.

TD 5

1 **2.** $d^2 = \dfrac{0{,}002\,5}{0{,}5} + \dfrac{0{,}002\,5}{0{,}5} = 0{,}01$.

3.



5. • Pour A : $d^2 = 0{,}0196$.

• Pour B : $d^2 = 0{,}0036$.

• Pour C : $d^2 = 0{,}04$.

Au risque de 10 %, les résultats de A et B sont en adéquation avec les résultats d'une pièce équilibrée, ce qui n'est pas le cas de C.

2 **a)** $d^2 = 0{,}01$, valeur qui dépasse 0,027 04. On ne peut donc pas accepter, au seuil de risque de 10 %, que la pièce soit équilibrée.

Note : Les fréquences sont les mêmes qu'au **1.b)** (ainsi que la valeur de d^2), mais les valeurs de n ne sont pas les mêmes.

b) $d^2 = 0{,}0036$; $d^2 > d_9$. La conclusion est la même.

TD 6

3 **1.** $p(X = 50) \approx 0{,}079\,59$; $p(X \leqslant 40) \approx 0{,}028\,44$;

$p(X > 70) = 1 - p(X \leqslant 70) \approx 1{,}608 \times 10^{-5}$;

$p(45 \leqslant X \leqslant 55) = p(X \leqslant 55) - p(X \leqslant 44) \approx 0{,}863\,48$.

2. a) $p(X \leqslant 530) - p(X \leqslant 469) \approx 0{,}946\,32$.

b) La probabilité d'un tel résultat est de l'ordre de $p(X \leqslant 450)$, soit 0,000 87. Ce qui est peu probable.

3. En supposant que le nombre X de NON suit la loi binomiale telle que $n = 1000$ et $p = 0{,}5$, alors :

$$p(X \leqslant 400) \approx 1{,}3 \times 10^{-10},$$

ce qui représente un événement pratiquement impossible.

Corrigés des exercices

maîtriser le cours (page 309)

1. Loi binomiale

1 **1.** $p = \frac{3n}{4n} = \frac{3}{4}$.

2. On utilise la loi binomiale de paramètres $n = 3$, $p = \frac{3}{4}$.

• $p(X = 0) = \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{4^3}$;

• $p(X = 1) = \binom{3}{1} \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \left(\frac{3}{4}\right) = \frac{9}{4^3}$;

• $p(X = 2) = \binom{3}{2} \times \left(\frac{1}{4}\right) \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{27}{4^3}$;

• $p(X = 3) = \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{4^3}$.

2 On utilise la loi binomiale $\mathcal{B}\left(6; \frac{1}{6}\right)$;

$p(X = 3) = \binom{6}{3} \times \left(\frac{1}{6}\right)^3 \times \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 20 \times \frac{5^3}{6^3}$.

3 On utilise la loi binomiale $\mathcal{B}\left(10; \frac{1}{2}\right)$;

$p(X = 3) = \binom{10}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{15}{2^7}$.

4 *Corrigé dans le manuel.*

5 On utilise la loi binomiale de paramètres $n = 6$, $p = \frac{1}{2}$:

$p(X = 4) = \binom{6}{4} \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{15}{2^6} = \frac{15}{64}$.

6 **a)** $p(X = 3) = \binom{6}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{16}$.

b) $p(X = 3) = \binom{6}{3} \times (0,4)^3 \times (0,6)^3 = 0{,}276\,48$.

7 **a)** • $p(X = 4) = \binom{10}{4} \times (0,3)^4 \times (0,7)^6 \approx 0{,}2$;

• $p(X = 5) = \binom{10}{5} \times (0,3)^5 \times (0,7)^5 \approx 0{,}103$;

b) • $p(X = 6) = \binom{10}{6} \times (0,7)^6 \times (0,3)^4 \approx 0{,}2$;

• $p(X = 2) = \binom{10}{2} \times (0,7)^2 \times (0,3)^8 \approx 0{,}014$.

8 • $p(X = 0) = (0{,}7)^{50} \approx 1{,}8 \times 10^{-8}$;

• $p(X = 49) = 50 \times (0{,}3)^{49} \times 0{,}7 \approx 8{,}38 \times 10^{-25}$.

9 *Corrigé dans le manuel.*

10 On utilise la loi binomiale avec $n = 5$; $p = 0{,}95$ (ne tombe pas en panne).

1. $p(X = 0) = (0{,}95)^5 \approx 0{,}773\,8$.

2. $p(X = 0) + p(X = 1) = (0{,}95)^5 + \binom{5}{1} \times (0{,}95)^4 \times 0{,}05$

$\approx 0{,}977\,4$.

11 On utilise la loi binomiale avec $n = 20$; $p = 0{,}1$ (acheteur).

1. $p(X = 0) = (0{,}9)^{20} \approx 0{,}121\,6$.

2. $1 - p(X = 0) - p(X = 1) = 1 - (0{,}9)^{20} - \binom{20}{1} \times (0{,}9)^{19} \times 0{,}1$

$\approx 0{,}608\,2$.

2. et 3. Lois de probabilité

12 **a)** $p(X < 3) = \frac{3 - 0}{10} = 0{,}3$.

b) $p(X > 6) = \frac{10 - 6}{10} = 0{,}4$.

c) $p(3 < X < 8) = \frac{8 - 3}{10} = 0{,}5$.

13 *Corrigé dans le manuel.*

14 $p(T \geqslant 300) = 1 - (1 - e^{-0{,}005 \times 300}) = e^{-1{,}5} \approx 0{,}223$.

15 **1.** $e^{-0{,}002 \times t} = 0{,}8$; donc $t = \frac{\ln 0,8}{-0,002} \approx 111{,}57$ h.

2. $p(300 < T < 700) = p(T < 700) - p(T \leqslant 300)$

$= 1 - e^{-0{,}002 \times 700} - 1 + e^{-0{,}002 \times 300}$

$= e^{-0{,}6} - e^{-1{,}4} \approx 0{,}302$.

pour apprendre à chercher (page 310)

16 Plusieurs lancers de deux pièces de monnaie

Les outils :

• Loi binomiale.

• Événements contraires (ou complémentaires).

Les objectifs :

• Savoir calculer des probabilités.

1. a) FF, FP, PF, PP. **b)** $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{4}$. **c)** $p = \frac{1}{4}$.

2. a) Trois succès et sept échecs, donc (X = 3).

b) $p(A) = \binom{10}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^3 \times \left(\frac{3}{4}\right)^7$.

3. $\overline{B}$: 0 fois «deux PILE»,

$p(\overline{B}) = \left(\frac{3}{4}\right)^{10}$, d'où $p(\overline{B}) = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{10}$.

17 La roue de la fortune

Les outils :

• Variable aléatoire.

• Espérance.

• Loi binomiale.

Les objectifs :

• Savoir interpréter l'espérance dans un jeu.

1. • Aucun dé ne marque c : Y = – 1.

• un dé marque c : Y = 1.

• deux dés marquent c : Y = 2.

• trois dés marquent c : Y = 3.

2. a) On lance trois dés, le résultat est, pour chaque dé, c ou $\bar{c}$.

b) $p = \frac{1}{6}$; $n = 3$.

c) Y = – 1, donc X = 0, etc.

d) • $p(\mathrm{Y} = -1) = \left(\frac{5}{6}\right)^3$;

• $p(\mathrm{Y} = 1) = \binom{3}{1}\left(\frac{5}{6}\right)^2 \times \frac{1}{6}$;

• $p(\mathrm{Y} = 2) = \binom{3}{2}\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^2$;

• $p(\mathrm{Y} = 3) = \left(\frac{1}{6}\right)^3$.

y_i	–1	1	2	3
$p(\mathrm{Y} = y_i)$	$\frac{5^3}{6^3}$	$\frac{75}{6^3}$	$\frac{15}{6^3}$	$\frac{1}{6^3}$

• $\mathrm{E}(\mathrm{Y}) = \dfrac{-5^3 + 75 + 30 + 3}{6^3} = \dfrac{-17}{6^3}$.

e) En 216 parties, le joueur perdra en moyenne $\frac{-17}{6^5} \times 216$ jetons, soit 17 jetons.

18 Fonctionnement d'un système de communication

Les outils :

• Variable aléatoire.

Les objectifs :

• Savoir étudier la fiabilité d'un système.

2. a) $p_5 = p(\mathrm{X}_5 = 3) + p(\mathrm{X}_5 = 4) + p(\mathrm{X}_5 = 5)$

$= \binom{5}{3}p^3(1-p)^2 + \binom{5}{4}p^4(1-p) + p^5$

$= 10p^3(1-p)^2 + 5p^4(1-p) + p^5$.

b) De la même façon :

$$p_3 = \binom{3}{2} p^2(1-p) + p^3 = 3p^2(1-p) + p^3.$$

c) $p_5 > p_3 \Leftrightarrow 10p^3(1-p)^2 + 5p^4(1-p) + p^5 \geqslant 3p^2(1-p) + p$

$\Leftrightarrow 3p^2(p-1)^2(2p-1) > 0$

$\Leftrightarrow p > \frac{1}{2}$.

19 Remboursement d'objets défectueux

Les outils :

• Loi binomiale et espérance.

• Événements contraires (ou complémentaires).

Les objectifs :

• Savoir calculer des probabilités.

2. $1 - p(\mathrm{X}=0) - p(\mathrm{X}=1) = 1 - (0{,}99)^{10} - \binom{10}{1} \times (0{,}99)^9 \times 0{,}01$

$\approx 0{,}004$.

• Pour 100 paquets : $100 \times 0{,}004 = 0{,}4$.

20 Combien d'enfants pour avoir une fille ?

Les outils :

• Loi binomiale.

• Événements contraires (ou complémentaires).

Les objectifs :

• Interpréter l'optimisation en probabilité.

2. a) $p(\overline{\mathrm{A}}) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ ($\overline{\mathrm{A}}$: avoir n garçons).

D'où $p(\mathrm{A}) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

b) Résolvons $p(\overline{\mathrm{A}}) \geqslant 0{,}01$, d'où $n > 6{,}65$, soit $n = 7$.

pour progresser (page 312)

21 1. On utilise la loi binomiale avec $n = 10$ et $p = 0{,}92$ (pas de défaut).

$p(\mathrm{X} = 10) = (0{,}92)^{10} \approx 0{,}4344$.

2. $p(\mathrm{X} = 7) + p(\mathrm{X} = 8) + p(\mathrm{X} = 9) + p(\mathrm{X} = 10)$

$= \binom{10}{7} \times (0,92)^7 \times (0,08)^3 + \binom{10}{8} \times (0,92)^8 \times (0,08)^2$

$+ \binom{10}{9} \times (0,92)^9 \times 0,08 + (0,92)^{10}$

$\approx 0{,}994$.

22 A gagne le tournoi s'il gagne cinq parties au moins. On utilise la loi binomiale avec $n = 9$, $p = 0{,}6$.

$p(\mathrm{X} = 5) + p(\mathrm{X} = 6) + p(\mathrm{X} = 7) + p(\mathrm{X} = 8) + p(\mathrm{X} = 9)$

$\approx 0{,}7334$.

23 • $p(\mathrm{X} = 9) + p(\mathrm{X} = 10) + p(\mathrm{X} = 11) = p(\mathrm{Y} = 1)$, donc $p(\mathrm{Y} = 1) = 0{,}4965$;

• sinon $\mathrm{Y} = -1$.

• $\mathrm{E}(\mathrm{Y}) \approx -0{,}007$.

• Donc le jeu n'est pas équitable.

24 1. Pour une journée, un client achète (succès) avec une probabilité $p = \frac{1}{15}$, donc il y a répétition de dix épreuves identiques et indépendantes.

Donc le nombre d'acheteurs suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{1}{15}$.

2. • $p(\mathrm{X} = k) = \binom{10}{k}\left(\frac{1}{15}\right)^k\left(\frac{14}{15}\right)^{10-k}$.

• $p(\mathrm{X} = 0) \approx 0{,}5016$;

• $p(\mathrm{X} = 1) \approx 0{,}3583$;

• $p(\mathrm{X} = 5) \approx 0{,}00023$.

3. $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = n \times p = \frac{2}{3}$.

4. $\mathrm{Y} = 100\mathrm{X}$, donc $\mathrm{E}(\mathrm{Y}) = 100 \times \frac{2}{3} = \frac{200}{3}$ €.

25 Loi binomiale avec $n = 25$, $p = 0{,}3$.

1. $p(\mathrm{X} = 5) = \binom{25}{5} \times (0,3)^5 \times (0,7)^{20} \approx 0{,}1030$.

2. $p(\mathrm{X} = 0) + p(\mathrm{X} = 1) + p(\mathrm{X} = 2) + p(\mathrm{X} = 3) + p(\mathrm{X} = 4) + p(\mathrm{X} = 5) = p(\mathrm{X} \leqslant 5) \approx 0{,}1935$.

26 **1.** • « Gagner deux parties sur quatre » :

$$p = \binom{4}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}.$$

• « Gagner quatre parties sur huit » :

$$p' = \binom{8}{4} \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{35}{128}.$$

Donc $p > p'$.

2. « Gagner au moins trois sur quatre parties » :

$$p_1 = \binom{4}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{5}{24}.$$

• « Gagner au moins cinq parties sur huit » :

$$p'_1 = \binom{8}{5} \times \left(\frac{1}{2}\right)^8 + \binom{8}{6} \times \left(\frac{1}{2}\right)^8 + \binom{8}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^8 + \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{93}{2^8}.$$

Donc $p'_1 > p_1$.

27 **1.** $1 - p(X=0) - p(X=1) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^5 - \binom{5}{1} \times \left(\frac{2}{3}\right)^4 \times \frac{1}{3} = \frac{131}{243}.$

2. $1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n \geqslant 0{,}9 \Leftrightarrow n \geqslant 5{,}68$, soit $n = 6$.

28 **1.** Le nombre de réponses exactes suit la loi binomiale de paramètres $n = 6$ et $p = \frac{1}{4}$.

$p(X \geqslant 3) = 1 - p(X \leqslant 2) \approx 0{,}1694$.

2. Ici la loi binomiale a pour paramètres $n = 6$ et $p = \frac{1}{3}$.

$p(Y \geqslant 3) \approx 0{,}3196$.

★ **29** **1.** X suit une loi binomiale de paramètres $n = 3$ et p.

Donc : $p(X = 0) = (1 - p)^3 = q^3$;

$p(X = 1) = 3(1 - p)^2 p = 3q^2 p$;

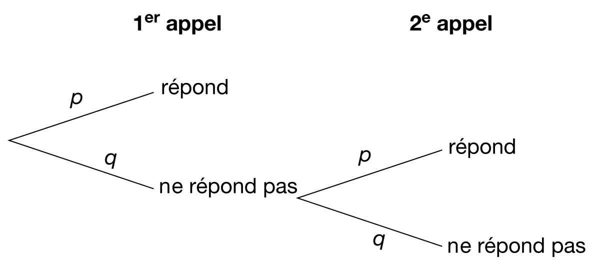
$p(X = 2) = 3(1 - p)p^2 = 3qp^2$ et $p(X = 3) = p^3$.

2. • Un arbre permettrait la visualisation des valeurs de Y conditionnées par celles de X. C'est un procédé long. Chaque probabilité est obtenue par des formules du type :

$p(Y = 0) = p(X = 0 \text{ et } Y = 0) + p(X = 1 \text{ et } Y = 0) + p(X = 2 \text{ et } Y = 0)$.

Il vaut mieux renoncer, mais on arrive au résultat.

• Il faut faire un arbre : pour un correspondant, il y a deux possibilités au premier appel, puis éventuellement deux autres au deuxième appel.



Ainsi, la probabilité qu'un correspondant réponde au second appel est pq.

Donc Y suit une loi binomiale de paramètres $n = 3$ et pq, d'où la loi de Y.

y_i	0	1	2	3
$p(Y = y_i)$	$(1 - pq)^3$	$3(1 - pq)^2 pq$	$3(1 - pq)(pq)^2$	$(pq)^3$

Remarque : $1 - pq = p + q^2$.

3. a) Le problème est de connaître la probabilité qu'un correspondant réponde au premier ou au second appel.

Or, la probabilité qu'un correspondant réponde au premier ou au second appel est :

$$p + pq = p(1 + q) = (1 - q)(1 + q) = 1 - q^2.$$

Ce qui permet de répondre à la question.

b) Les formules donnent :

$$E(X) = 3p = 1;\ E(Y) = 3pq = \frac{2}{3};\ E(Z) = 3(1 - q^2) = \frac{5}{3}.$$

On peut remarquer que $E(X) + E(Y) = E(Z)$.

30 **1.** $p(X = 1) + p(X = 3) = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{2}.$

2. $p(X = 1) + p(X = 3) + p(X = 5) =$

$$5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^5 + 10 \times \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{2}.$$

3. Le développement de $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)^n$ à l'aide de la formule du binôme donne la solution.

31 X est la variable aléatoire égale au nombre de 0, elle suit la loi binomiale de paramètres $n = 6$; $p = \frac{1}{2}$.

Le nombre de 0 est inférieur au nombre de 1 si et seulement si X = 0, 1 ou 2.

$p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2) =$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^6 + 6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^6 + 15 \times \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{23}{64}.$$

32 $E(X) = np = 100$ et le bénéfice sera de 50 €.

33 X désigne le nombre de bonnes réponses (au hasard); X suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$, $p = \frac{1}{2}$.

$$p(X \geqslant 7) = p(X = 7) + p(X = 8) + p(X = 9) + p(X = 10)$$
$$= \frac{120}{2^{10}} + \frac{45}{2^{10}} + \frac{10}{2^{10}} + \frac{1}{2^{10}} = \frac{11}{64}\ (0{,}17187).$$

34 On désigne par p_3 la probabilité pour un trimoteur et p_5 pour un cinq moteurs de terminer leur vol.

$p_3 = p^3 + 3p^2(1 - p)$;

$p_5 = p^5 + 5p^4(1 - p) + 10p^3(1 - p)^2$;

$p_3 - p_5 = p^3 + 3p^2(1 - p) - p^5 - 5p^4(1 - p) - 10p^3(1 - p)^2$
$= p^2(p - 1)^2(3 - 6p)$.

Donc $p_3 \leqslant p_5 \Leftrightarrow p \geqslant \frac{1}{2}$.

35 R est l'événement « *un lot est remboursable* ».

$p(R) = 1 - (0{,}992)^{12} - 12(0{,}992)^{11} \times 0{,}008 \approx 0{,}004$.

« *Un seul lot sur les trois est remboursable* » a pour probabilité : $3 \times (0{,}004) \times (0{,}996)^2 \approx 0{,}012$.

36 **1.** X suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0{,}02$.

$p(X = k) = \binom{100}{k} \times (0{,}02)^k \times (0{,}98)^{100 - k}$.

2. • $k = 0 : 0{,}132$; • $k = 1 : 0{,}271$; • $k = 2 : 0{,}273$.

37 Appelons A l'événement « *On a obtenu six fois* "face" », B l'événement « *Les trois premiers tirages sont* FPF ».

1. $p_A(B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)}$.

• $A \cap B$ est l'événement «FPF *puis il y a quatre* "face" *dans les sept autres tirages*».

$p(A \cap B) = p \times (1-p)p \times \binom{7}{4} p^4 \times (1-p)^3$.

• $p(A) = \binom{10}{6} p^6 \times (1-p)^4$.

• D'où $p_A(B) = \dfrac{35p^6(1-p)^4}{210p^6(1-p)^4} = \dfrac{1}{6}$.

2. Le résultat est :

$$p(A \cap B) = (1-p)\,p(1-p)\binom{7}{5}p^5(1-p)^2.$$

$p_A(B') = \dfrac{21p^6(1-p)^4}{210p^6(1-p)^4} = \dfrac{1}{10}$.

38 Le nombre de garçons dans une famille de n enfants suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0{,}51$.

a) $p(X=0) + p(X=1) + p(X=2)$

$= (0{,}49)^5 + 5 \times (0{,}49)^4 \times 0{,}51 + 10 \times (0{,}49)^3 \times (0{,}51)^2$

$\approx 0{,}306\,8$.

b) $p(Y=0) + p(Y=1) + p(Y=2)$

$= (0{,}49)^6 + 6 \times (0{,}49)^5 \times 0{,}51 + 15 \times 0{,}49 \times (0{,}51)^2$

$\approx 0{,}325\,2$.

★ **39** La probabilité d'obtenir une face noire est $\frac{2}{3}$ ($\frac{1}{3}$ pour une face blanche).

1. Il faut B B B B N, d'où la probabilité : $\left(\frac{1}{3}\right)^4 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3^5}$.

2. $1 - \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{211}{243}$.

3. X suit la loi binomiale de paramètres $n = 5$; $p = 7$, d'où :

$p(X = k) = \binom{5}{k} \times \left(\frac{2}{3}\right)^k \times \left(\frac{1}{3}\right)^{5-k}$ pour $k = 0, 1, ..., 5$.

x_i	0	1	2	3	4	5
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{243}$	$\frac{10}{243}$	$\frac{40}{243}$	$\frac{80}{243}$	$\frac{80}{243}$	$\frac{32}{243}$

★ **40 1. a)** $\binom{8}{5} = 56$. **b)** $p = \dfrac{\binom{7}{4}}{56} = \dfrac{35}{56} = \dfrac{5}{8} = 0{,}625$.

2. Le nombre de matchs disputés par Jean suit la loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = \frac{5}{8}$.

a) $p(X=0) = \left(\frac{3}{8}\right)^3 = \frac{27}{512} \approx 0{,}053$.

b) $p(X=1) = \binom{3}{1} \times \left(\frac{5}{8}\right) \times \left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{135}{512} \approx 0{,}221$.

c) $p(X=2) = \binom{3}{2} \times \left(\frac{5}{8}\right)^2 \times \left(\frac{3}{8}\right) = \frac{225}{512} \approx 0{,}439$.

d) $p(X=3) = \left(\frac{5}{8}\right)^3 = \frac{125}{512} \approx 0{,}244$.

★ **41 1. a)** Deux feux verts : $0{,}75 \times 0{,}5 = 0{,}375 = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$.

b) $1 - 0{,}25 \times 0{,}5 = 1 - 0{,}125 = 0{,}775 = 1 - \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{8}$.

2. X suit la loi binomiale de paramètres :

$$n = 5 \text{ et } p = 0{,}75 = \frac{3}{4}.$$

D'où $p(X = k) = \binom{5}{k} \times (0,75)^k \times 0{,}25^{5-k}$; $k = 0, ..., 5$.

• $p(X=0) = \frac{1}{1\,024}$; • $p(X=1) = \frac{15}{1\,024}$;

• $p(X=2) = \frac{45}{512}$; • $p(X=3) = \frac{135}{512}$;

• $p(X=4) = \frac{405}{1\,024}$; • $p(X=5) = \frac{243}{1\,024}$.

★ **42 1. a)** $\dfrac{1}{\binom{7}{3}} = \dfrac{1}{35}$.

b) Il doit trouver au moins deux mots, c'est-à-dire soit deux, soit trois, donc : $\dfrac{1}{35} + \dfrac{\binom{3}{2} \times \binom{4}{1}}{35} = \dfrac{13}{35}$.

2. $\dfrac{1}{\binom{6}{2}} = \dfrac{1}{15}$.

3. a) Un seul gagnant :

$$\binom{5}{1} \times \left(\frac{1}{35}\right) \times \left(\frac{34}{35}\right)^4 = \frac{5 \times 34^4}{35^5} \ (\approx 0{,}127\,2).$$

b) $1 - \left(\frac{34}{35}\right)^5 = \dfrac{35^5 - 34^5}{35^5} \approx 0{,}134\,9$.

★ **43 A. 1.** $\dfrac{\binom{4}{3}}{\binom{9}{3}} = \dfrac{1}{21}$.

2. $p(E_1) = \dfrac{5 \times 5 \times 3}{\binom{9}{3}} = \dfrac{5}{28}$; $p(E_2) = 1 - \dfrac{\binom{4}{3}}{\binom{9}{3}} = \dfrac{20}{21}$.

3.

x_i	0	1	2	3
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{21}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{5}{42}$

B. 1. $\binom{5}{2} \times \left(\frac{1}{21}\right)^2 \times \left(\frac{20}{21}\right)^2 \approx 0{,}02$.

2. On est amené à résoudre : $1 - \left(\frac{20}{21}\right)^n > 0{,}95$, soit $n > 61{,}4...$, d'où $n = 62$.

★ **44 1. a)** Il y a $\binom{29}{3} = 29 \times 14 \times 9 = 3\,654$ tirages.

La probabilité est : $\dfrac{5 \times 4 \times 1}{29 \times 14 \times 9} = \dfrac{10}{1\,827}$.

b) $1 - \dfrac{\binom{24}{3}}{3\,654} = 1 - \dfrac{1\,012}{1\,827} = \dfrac{815}{1\,827}$.

2. a) $\frac{5}{29}$. **b)** $1 - \left(\frac{24}{29}\right)^3 = \frac{10\,565}{24\,389}$.

Avec un tableur

45 1. La même épreuve est répétée cinquante fois, de façon indépendante, et $p = 0{,}05$.

2. $p(X=3) = \binom{100}{3} \times (0{,}05)^3 \times (0{,}95)^{47} \approx 0{,}22$.

3. On trouve $k = 8$.

46 1. C'est la loi binomiale avec $n = 100$ et $p = \frac{1}{3}$.

2. $n = 10$. **3.** $k = 10$.

Variables continues

47 **1.** • $f(x) \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$.

• $\int_1^b \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^b = 1 - \frac{1}{b}$ et $\lim_{b \to +\infty}\left(1 - \frac{1}{b}\right) = 1$.

C'est donc une densité de probabilité.

2. $f(x) \geqslant 0$ et $\int_1^b \frac{3}{x^4}dx = \left[-\frac{1}{x^3}\right]_1^b = 1 - \frac{1}{b^3}$ et sa limite quand b tend vers l'infini est 1.

Donc f définit une densité de probabilité.

48 **1.** Soit X l'heure d'arrivée du bus, l'attente T est égale à X – 10h.

Si $T \geqslant 10$, alors $X \geqslant$ 10h10.

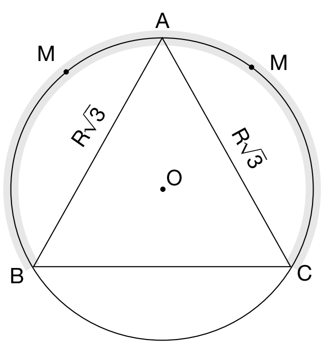
Donc $p(T \geqslant 10) = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$.

2. La probabilité est : $\frac{p(X \geqslant 10h15 \text{ et } X \geqslant 10h25)}{p(X \geqslant 10h15)}$.

L'événement ($X \geqslant$ 10h15 et $X \geqslant$ 10h25) est l'événement ($X \geqslant$ 10h25) dont la probabilité est $\frac{5}{30} = \frac{1}{6}$.

Et $p(X \geqslant 10h15) = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$, d'où la probabilité cherchée est $\frac{1}{3}$.

★★ **49** **1. a)** M doit être sur les arcs AB ou AC.

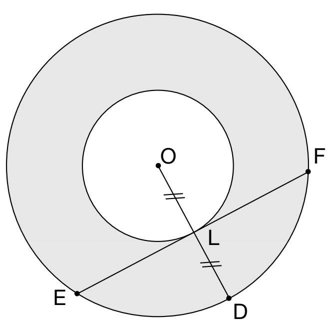


b) D'où la probabilité : $P = \frac{2}{3}$.

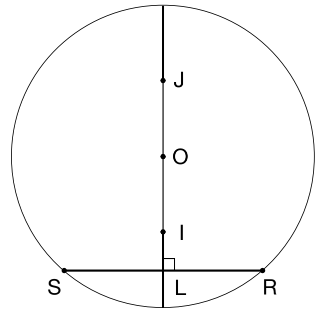
2. Si $EF = R\sqrt{3}$, L est le milieu du rayon [OD].

Pour que $0 \leqslant X \leqslant R\sqrt{3}$, il faut et il suffit que L soit à l'extérieur du cercle de rayon $\frac{R}{2}$.

Donc $P' = \frac{\text{aire de la couronne}}{\text{aire du cercle de rayon R}} = \frac{3}{4}$.



3. On a $P'' = \frac{1}{2}$.



50 **1.** $p(T \leqslant 70) = 1 - e^{-\lambda \times 70}$, d'où :

$1 - e^{-\lambda \times 70} = 0,05 \Leftrightarrow e^{-\lambda \times 70} = 0,95$

$\Leftrightarrow l = -\frac{\ln 0,95}{70}$ ($\approx 0,000\,733$).

2. $p(T > 30) = e^{\frac{\ln 0,95}{70} \times 30} \approx 0,978$.

51 Sa demi-vie est $\frac{\ln 2}{0,000\,4} \approx 1\,733$ jours.

52 **1. a)** $p(X < 1000) = 1 - e^{-\frac{\ln 2}{5\,568} \times 1\,000} \approx 0,117$.

b) On écrit que $1 - e^{-\frac{\ln 2}{5\,568} \times x} = 0,2$ soit $x \approx 1792,5$ années.

2. a) $p(T < 1000) = 1 - e^{-\frac{\ln 2}{30} \times 1\,000} \approx 1$.

b) On écrit que $1 - e^{-\frac{\ln 2}{30} \times t} = 0,2$ soit $t \approx 9,66$ années.

53 • $p(T \geqslant 300) = e^{-0,0004 \times 300} = 0,887$.

• La même probabilité (variables aléatoires sans mémoire).

54 **1.** $p(T_A \geqslant 300) = e^{-0,12}$.

2. $p(T_A \geqslant 300) \times p(T_B \geqslant 300) = (e^{-0,12})^2 = e^{-0,24} \approx 0,787$.

3. La machine est en panne avant 300 jours avec la probabilité :

$$p(T_A \leqslant 300) \times p(T_B \leqslant 300) = (1 - e^{-0,12})\,(1 - e^{-0,12}).$$

Elle fonctionne donc après 300 jours avec la probabilité :

$$1 - (p(T_A \geqslant 300)) \times (p(T_B \geqslant 300)) = 1 - (1 - e^{-0,12})^2$$
$$= 2e^{-0,12} - e^{-0,24}$$
$$\approx 0,987.$$

55 **1.** Il faut résoudre : $e^{-0,002 \times t} = 0,8$, d'où :

$$t = \frac{-\ln 0,8}{0,002} \approx 111 \text{ h}.$$

2. $p(300 \leqslant T < 700) = p(T < 700) - p(T < 300)$

$= (1 - e^{-700\lambda}) - (1 - e^{-300\lambda})$

$= e^{-0,6} - e^{-1,4} \approx 0,302$.

★ **56** **1.** Le système a une durée de vie inférieure à t si et seulement si les deux composants ont une durée de vie inférieure à t :

$$p(T \leqslant t) = p(T_1 \leqslant t) \times p(T_2 \leqslant t).$$

2. $p(T \leqslant t) = (1 - e^{-\lambda t}) \times (1 - e^{-\lambda t}) = (1 - e^{-\lambda t})^2$.

3. $p(T > 365) = 1 - p(T \leqslant 365) = 1 - (1 - e^{-\lambda \times 365})^2$.

$\approx 0,001\,35$.

4. $p(\mathrm{T}' \leqslant t) = (1 - \mathrm{e}^{-\lambda t})^3$, d'où :

$$p(\mathrm{T}' > 365) = 1 - (1 - \mathrm{e}^{-\lambda \times 365})^3 \approx 0{,}002.$$

★ **57 1.** $p(\mathrm{T} \geqslant 2) = \mathrm{e}^{-\lambda \times 2} = \mathrm{e}^{-1} \approx 0{,}368$.

2. Variable sans mémoire, donc la probabilité est :

$$p(\mathrm{T} \geqslant 10) = \mathrm{e}^{-5} \approx 0{,}006\,7.$$

58 1. La probabilité est $\mathrm{e}^{-\frac{50}{75}} \approx 0{,}51$.

2. La probabilité est $\frac{90}{140} \approx 0{,}64$.

59 1. $\frac{1}{6}$.

2. $d^2 = 0{,}105\,3$.

Il y a lieu, au seuil de risque de 10 %, de penser que le dé n'est pas déséquilibré.

60 1.

numéro	0	1	2	3	4	5
fréquence	0,022	0,032	0,032	0,026	0,036	0,016

numéro	6	7	8	9	10	11
fréquence	0,02	0,048	0,028	0,034	0,034	0,022

numéro	12	13	14	15	16	17
fréquence	0,024	0,024	0,018	0,026	0,034	0,018

numéro	18	19	20	21	22	23
fréquence	0,024	0,028	0,028	0,016	0,044	0,03

numéro	24	25	26	27	28	29
fréquence	0,016	0,014	0,024	0,02	0,026	0,034

numéro	30	31	32	33	34	35
fréquence	0,026	0,024	0,04	0,032	0,022	0,032

numéro	36
fréquence	0,026

2. On trouve $d_9 = 0{,}081\,58$.

3. d_9 est inférieur à 0,095, donc l'échantillon suit la loi équirépartie au seuil de risque de 10 %.

Vrai ou faux ?

61 1. Vrai : $p(\mathrm{X} = k) = \binom{20}{k} \times \left(\frac{1}{2}\right)^k \times \left(\frac{1}{2}\right)^{20-k}$;

$$p(\mathrm{X} = 20 - k) = \binom{20}{20-k} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{20-k} \times \left(\frac{1}{2}\right).$$

Or, $\left(\frac{1}{2}\right)^k \times \left(\frac{1}{2}\right)^{20-k} = \left(\frac{1}{2}\right)^{20}$ et $\binom{20}{k} = \binom{20}{20-k}$.

2. Faux : $\left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{20-k} \neq \left(\frac{1}{3}\right)^{20-k} \left(\frac{2}{3}\right)^k$.

problèmes de synthèse (page 318)

★ **62 1. a)** $\bar{x} = 50$; $\sigma = 0{,}202$. **b)** 2,5 %.

2. a) Pour chaque rouleau, la probabilité d'être défectueux est 0,03 ; et ceci indépendamment les uns des autres.

Donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0{,}03$.

b) • $p(\mathrm{E}_0) = (0{,}97)^{10}$;

• $p(\mathrm{E}_1) = 10 \times (0{,}97)^9 \times 0{,}03$;

• $p(\mathrm{E}_2) = 1 - p(\mathrm{E}_0) - p(\mathrm{E}_1)$.

★ **63 1.** • $p(\mathrm{A}) = \dfrac{\binom{6}{2}}{\binom{20}{2}} = \dfrac{3}{38}$ (0,079) ;

• $p(\mathrm{B}) = 1 - \dfrac{\binom{14}{2}}{\binom{20}{2}} = \dfrac{99}{190}$ (0,521) ;

• $p(\mathrm{C}) = \dfrac{\binom{6}{2} + \binom{5}{2} + \binom{9}{2}}{\binom{20}{2}} = \dfrac{61}{190}$ (0,321).

2. $p_{\overline{\mathrm{C}}}(\mathrm{B}) = p\dfrac{(\mathrm{B} \cap \overline{\mathrm{C}})}{p(\overline{\mathrm{C}})} = \dfrac{6 \times 14}{190} \times \dfrac{190}{129} = \dfrac{28}{43}$ (0,651).

3. • $p(\mathrm{E}_0) = \left(\dfrac{129}{190}\right)^3 \approx 0{,}313$;

• $p(\mathrm{E}_1) = 3 \times \left(\dfrac{61}{190}\right) \times \left(\dfrac{129}{190}\right)^2 \approx 0{,}444$;

• $p(\mathrm{E}_2) = 3 \times \left(\dfrac{61\ ^2}{190}\right) \times \left(\dfrac{129}{190}\right) \approx 0{,}201$;

• $p(\mathrm{E}_3) = \left(\dfrac{61}{190}\right)^3 \approx 0{,}033$.

★★ **64 1.** $p(\mathrm{X} = k) = \binom{50}{k} \left(\dfrac{20}{\mathrm{N}}\right)^k \left(\dfrac{\mathrm{N} - 20}{\mathrm{N}}\right)^{50-k}$.

2. $f'(x) = 2\left(\dfrac{20}{x^2}\right)\left(\dfrac{20}{x}\right)^3 \left(1 - \dfrac{20}{x}\right)^{45} \left(-2 + \dfrac{25 \times 20}{x}\right)$.

D'où un maximum pour $x = 250$.

3. a) N = 250 (maximum de vraisemblance).

b) La proportion : $\dfrac{20}{\mathrm{N}} = \dfrac{4}{50}$, soit N = 250.