Exercices Annales 0 2004 Eléments de Correction:

Exercice 1:

1. On remarque que le plus grand numéro peut être 3 ou 4 ou 5 ou 6 ou 7.
   Pour $k \geq 3$, le nombre de tirages de 3 boules dont le plus grand numéro est k est : $\binom{k-1}{2}$
   Effectivement, il s'agit alors de tirer deux boules parmi les (k-1) boules dont le numéro est < k.
   D'où: Nombre de tirages = $\sum_{k=3}^{7} \binom{k-1}{2}$
2. D'où tirages de 3 boules distinctes parmi les 7 possède au moins une boule ayant un numéro ≥ 3.
   $$\sum_{k=3}^{7} \binom{k-1}{2} = \binom{7}{3} = 35$$

Exercice 2:

1. Equation de la tangente en M : $y = e^t(x-t)-e^t$.
   Coordonnées de N : N(t-1 ; 0)
   Coordonnées de P: P(t ; 0)
   Distance PN = 1.
2. (a) Même principe: $PN = \dfrac{f(t)}{f'(t)}$

   (b) PN = constante = k si et seulement si $kf'(t) = f(t)$ (E_k)

   (c) Solution de (E_k) : $f(t) = Ce^{t/k}$.

Exercice 3:

1. $z = \dfrac{8}{3} - 2i$
2. $y = -x$
3. $n = 3k$
4. $z = 2 + \sqrt{2}i$
5. $z_C = \sqrt{3} + 2i$

6. Cercle de diamètre [AB]. (Ensemble des points tels que l'on ait un angle droit !!!)

Exercice 4:

1. (a) M(x , y) appartient à Γ si et seulement si $y = x - 2\sqrt{x} + 1$

   .... si et seulement si $y = (\sqrt{x} - 1)^2$

   .... si et seulement si $\sqrt{y} = \sqrt{x} - 1$

   .... si et seulement si $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$

   (b) La dernière relation montre que M(x , y) appartient à Γ si et seulement si N(y , x) appartient aussi à G.

   D'où la conclusion.

2. (a) Si Γ était un arc de cercle, le centre de ce cercle derait sur la droite d'équation y=x et sur la droite d'équation x = 1.

   Ce serait donc le point A(1 ; 1). et son rayon serait R = 1.

   (b) Réponse! NON ... car , par exemple, la distance AM avec M sur Γ d'abscisse 1/4 n'est pas 1.

Exercice 7:

1. Vrai, car pour tout n , 1+ $u_n > u_n > 0$
2. Si u_n converge alors sa limite L est ≥ 0 car (u_n) positive. Donc u_n -> L et u_n +L -> L +1 d'où (v_n) converge vers L/(L+1)
3. Vrai! $v_n = f(u_n)$ avec $f(x) = x/(x+1)$ et f croissante sur [0 ; +oo[donc les suites ont les mêmes variations.
4. Faux!! $u_n = g(v_n)$ avec $g(x)= x/(1-x)$. Si (v_n) converge vers 1 alors (u_n) ne converge pas.
   On peut aussi prendre la contraposée:
   "Si (u_n) diverge alors (v_n) diverge". Si $u_n = n$ alors (u_n) diverge vers +oo et (v_n) converge vers 1.

Exercice 8:

1. C'est le plan médiateur de [AB].
2. G(1,5 ; 1 ; -0,5)
3. d différent de (AB), de (BC) et (CA).
4. J(2 ; 1 ; 1)
5. Droites non coplanaires.
6. Droite et Plan parallèles.
7. Intersection = Droite

Exercice 10: Spécialité

1. Faux!! Exemple, 4 ... divisible par 4 mais non par 8.
2. Vrai!! car 2 et 3 premiers entre eux et 6 = 2x3.
3. Faux!! Exemple, 12 ... divisble par 4 et 6 et non par 24.
4. Faux!! (tellement classique...) Prendre a = 7 et b = 5 , a + b = 12 et a -b = 2 .. Pgcd(a+b ; a-b) = 2
5. Vrai !! Si d = Pgcd(2a+b ; 3a+2b) alors d divise 2(2a+b) - (3a+2b) = a
   et d divise 3(2a+b)-2(3a+2b) = -b donc d divise a et b donc d = 1.

Exercice 12:

1. $$g(x) = \int_0^x f(t)dt + \frac{e^{x-1} \times (1-x)}{2}$$
2. La dérivée de g est : $g(x) = e^{x-1}$ (1-x/2) d'où g strictement croissante sur [0;1].
3. (a) $g(0)$= Aire du triangle (OIA) avec A(0 ; $f(0)$).
   Ce triangle est la moitié du rectangle (ABIO) avec B(1 ; $f(1)$) et ce rectangle est inclus dans Δ.
   (b) Théorème des Valeurs intermédiaires...
   g continue, strictement croissante sur [0;1] avec $g(0) \leq \frac{1}{2}\int_0^1 f(t)dt$ et $g(1) = \int_0^1 f(t)dt$
   Donc, il existe α unique compris entre 0 et 1 tel que $g(\alpha) = \frac{1}{2}\int_0^1 f(t)dt$
4. α = 0,331 par défaut à 0,001 près.

Exercice 15:

1. On calcule la dérivée de f et on obtient que f est strictement croissante sur [0;1].
   De plus, $f(0)$ et $f(1)$ sont dans [0 ; 1] d'où la conclusion.
2. Faire une récurrence! u_0 est bien dans [0;1].
   Hypothèse de récurrence: u_n est dans [0;1].
   D'après la quetsion précédente, on en déduit que $f(u_n)$ est dans dans [0;1].
   Donc que u_{n+1} est dans [0;1].
   D'où la conclusion par récurrence.
3. (a) et (b) On vous laisse le faire ...
   (c) $$u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n+2}{u_n+4} - u_n = \frac{3u_n + 2 - u_n(u_n+4)}{u_n+4} = \frac{(1-u_n)(u_n+2)}{u_n+4}$$
   On sait que u_n est dans [0;1] donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$ donc (u_n) est croissante.

(d) Suite croissante et majorée par 1, donc Suite convergente ....

(e) f est continue et $u_{n+1} = f(u_n)$ donc la limite l de (u_n) vérifie l'équation $f(l) = l$.

On pose l'équation et on a : $l = 1$ car l dans [0;1]

4. (a)

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 2} = \frac{\dfrac{3u_n + 2}{u_2 + 4} - 1}{\dfrac{3u_n + 2}{u_n + 4} + 2} = \frac{(3u_n + 2) - (u_n + 4)}{(3u_n + 2 + 2(u_n + 4))} = \frac{2u_n - 2}{5u_n + 10} = \frac{2}{5}\frac{u_n - 1}{u_n + 2} = \frac{2}{5}v_n$$

D'où la suite (v_n) est bien géométrique de raison (2/5).

(b) $v_0 = -1/2$ donc $v_n = -(1/2)(2/5)^n$.

(c) $u_n = \dfrac{1 + 2v_n}{1 - v_n}$

On remplace alors v_n par son expression de n et on obtient celle de u_n.

Comme v_n converge vers 0 (car $|-2/5| < 1$) , on retrouve que u_n converge vers 1.

Exercice 16:

1. Faites-le !
2. Vous calculez les distances AB , AC et BC et vous trouvez à chaque fois $2\sqrt{3}$.
Le triangle ABC est donc bien équilatéral.
De plus, O est l'isobarycentre des points A? B et C. D'où O = centre de ABC.
3. (a) C'est le plan médiateur du segment [AB]. C'est le plan (P) passant par le milieu de [AB] et dont $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal.
Equation de ce plan : $(P) : 6x - 2\sqrt{3}\,y = 0$
(b) Même principe. C'est le plan (Q) médiateur du segment [BC].
Equation de ce plan (Q) : $y = 0$.
(c) L'intersection de (P) et (Q) est l'ensemble des points vérifiant $\{x = 0 ; y = 0\}$. C'est l'axe (O ; k)
4. Si ABCD tétraèdre régulier alors D est équidistant des points A, B et C. Donc, d'après la question précédente, D est sur l'axe (O;k).
De plus, on connait la distance AB (voir quetsion 2).
D'où ABCD tétraèdre régulier si et seulement si AD = BD = CD = AB avec D(0 ; 0 ; z).
D'où $z = 2\sqrt{2}$ ou $z = -2\sqrt{2}$. D'où l'existence et l'unicité de D .
$D\,(0\,;0\,;2\sqrt{2})$
5. (a) On peut voir que $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 12\lambda^2 - 12\lambda + 6$ et $AM = BM = \sqrt{12\lambda^2 - 12\lambda + 12}$
D'où : $\cos(\widehat{AMB}) = \dfrac{12\lambda^2 - 12\lambda + 6}{12\lambda^2 - 12\lambda + 12} = \dfrac{2\lambda^2 - 2\lambda + 1}{2(\lambda^2 - \lambda + 1)}$
(b) Un simple calcul montre que la dérivée de f est du signe de $(4x$-2).
D'où f est décroissante sur]-oo;1/2] et croissante sur [1/2 ; +oo[.

(c) On sait que cos est décroissante sur [0 ; π]. Donc, l'angle AMB est maximum si et seulement si $f(\lambda)$ est minimun.

D'après les variations de f , cela correspond à $\lambda = 1/2$.

Exercice 17: Spécialité

Partie I

1. A et S sont distincts ainsi que C et G, donc il exsite une unique similitude directe telle que S(A)=C et S(E)=G.
   L'angle de S est $(\overrightarrow{AE};\overrightarrow{CG})$.
   Or, $(\overrightarrow{AE};\overrightarrow{CG}) = (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CB}) = -\dfrac{\pi}{2}$, D'où l'angle de S.
2. Ω = centre de S.
   (a) $S(\Omega) = \Omega$ donc $(\Omega A ; \Omega C) = -\pi/2$. Donc, comme ABC est rectangle en B, le point Ω appartient au cercle Γ.
   De même, (Ω S ; ΩG) = - / 2 donc ,comme BSG est rectangle en B, le point appartient aussi au cercle Γ ' .
   D'où Ω appartient aux deux cercles.
   (b) Le point E appartient au segment [AB] donc il existe un réel k compris entre 0 et 1 tel que:
   $\overrightarrow{AE} = k\ \overrightarrow{AB}$. Si B = S(B) alors : $\overrightarrow{CG} = k\ \overrightarrow{BC}$
   Or, ' appartient au segment [CG], donc cette dernière est impossible ave k compris entre 0 et 1.
   D'où S(B) distinct de B.
   D'où B distinct de Ω .
   (c) Comme le centre de S appartient aux deux cercles, on en déduit que le centre de S est le point K.

Partie II

1. Faites-le ! Remarquons que le point Ω a pour affixe -1 + 2i.
   Pour le vérifier, il suffit d'écrire les équations des deux cercles Γ et Γ 'chercher leurs points d'intersection.
   On peut aussi chercher l'écriture complexe de S, et obtenir z' = [(-1-8i)z +(-30+20i)]/13
2. Ecriture complexe de S' -> Elle est de la forme z' = az + b.
   On sait S'(A) = E et S'(C)=G. On écrit alors un système d'équation dont les inconnues sont a et b.
   Et ona: a = -2i et b = -5. D'où S' : z' = -2iz - 5.
3. Point fixe de S' : On pose l'équation z = -2iz - 5 . On a alors z = -1 +2i.
   D'où $\Omega = \Omega$ '.

Exercice 25:

Partie A

M_1 (0,1 ; 1,1) ; M_2 (0,2 ; 1,190) ; M_3 (0,3 ; 1,2748) ; M_4 (0,4 ; 1,3533) ; M_5 (0,5 ; 1,4272).

Placez alors les points!

Partie B

1. Pour tout $x \geq 0$, $f\,'(x)f'x) = 1$. Donc, pour tout $x \geq 0$, on a $f\,(x)$ non nul.
2. Si il existe a tel que $f(a) < 0$, comme $f(0) = 1$, et comme f est continue sur $[0;a]$, alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe xo dans l'intervalle $[0;a]$ tel que $f(x\text{o})=0$.
3. Or, f ne s'annule pas sur [0;+*oo*[, d'où contradiction. Donc, pour tout $x \geq 0$, $f(x) > 0$.

Partie C

1. On sait que la dérivée de u^2 est $2u\,'u$. Donc une primitive de $u\,'\,u$ est $U = (1/2)u^2$.
2. La relation "Pour tout $x \geq 0$, $f\,'(x)f(x) = 1$" s'écrit : "Pour tout $x \geq$, $(\,f^{\,2}(x))' = 2$.
   Or, Les primitives de la fonction (2) sur l'intervalle [0;+*oo*[sont de la forme $(2x + C)$ où C est une constante réelle.
   Donc, il existe bien une constante réelle C telle que pour tout $x \geq 0$, $f^{\,2}(x) = 2x + C$
3. On sait de plus que $f(0) = 1$.
   On a donc, : $f^{\,2}(0) = 1$ d'où, d'après la relation obtenue dans la question 2. , on a $C = 1$.
   D'où L'expression de f: $\forall x \in [0;+\infty[\quad , \quad f(x) = \sqrt{2x+1}$
4. Finissez par les calculs .....