Corrigés des exercices

maîtriser le cours (page 115)

1. Généralités sur les transformations du plan

1 Par l'homothétie de centre I(2,1) et de rapport – 2, $M(x; y)$ a pour image $M'(x'; y')$ avec $\overrightarrow{IM'} = -2\overrightarrow{IM}$.

En traduisant à l'aide des coordonnées :

$$\begin{cases} x' - 2 = -2(x-2) \\ y' - 1 = -2(y-1) \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x' = -2x + 6 \\ y' = -2y + 3 \end{cases}$$

Les transformations h et g sont donc égales.

2 **a)** $x' + iy' = (x - 2y + 1) + i(2x + y - 1)$
$= (1 + 2i)(x + iy) + 1 - i.$

Soit $z' = (1 + 2i)z + 1 - i$ et f et g sont égales.
Toutefois, il est souvent plus pratique de développer l'expression $z' = (1 + 2i)z + 1 - i$ et d'identifier parties réelles et imaginaires.
L'expression devient $x' + iy' = (1 + 2i)(x + iy) + 1 - i$
$= x + iy + 2ix - 2y + 1 - i,$
soit $x' = x - 2y + 1$ et $y' = 2x + y - 1$.

b) $z' = (1 - i)\bar{z} + 2 - 3i$;
$x' + iy' = (1 - i)(x - iy) + 2 - 3i$
$= x - iy - ix - y + 2 - 3i.$
Ce qui donne $x' = x - y + 2$ et $y' = -x - y - 3$ et les applications f et g sont égales.

c) Comme l'écriture complex est $z' - 1 = e^{-i\frac{\pi}{4}}(z - 1)$, g est bien la rotation de centre I d'affixe 1 et d'angle $-\dfrac{\pi}{4}$.

3 *Corrigé dans le manuel.*

4 **a)** En procédant de la même manière qu'à l'exercice 3,

$$x = \frac{1}{2\sqrt{2}}x' + \frac{1}{2\sqrt{2}}y' \text{ et } y = \frac{1}{2\sqrt{2}}x' - \frac{1}{2\sqrt{2}}y'.$$

f est une transformation du plan d'application réciproque : $M(x; y) \mapsto M'(x'; y')$ avec :

$$x' = \frac{1}{2\sqrt{2}}(x + y) \text{ et } y' = \frac{1}{2\sqrt{2}}(x - y).$$

b) $x = -\dfrac{3}{25}x' - \dfrac{4}{25}y' + \dfrac{4}{5}$ et $y = -\dfrac{4}{25}x' + \dfrac{3}{25}y' + \dfrac{22}{5}$;

$f^{-1} : M(x, y) \mapsto M'\left(-\dfrac{3}{25}x - \dfrac{4}{25}y + \dfrac{4}{5} ; -\dfrac{4}{25}x + \dfrac{3}{25}y + \dfrac{22}{5}\right).$

5 **a)** Comme $z' = 2z + 3$, on obtient $z = \dfrac{1}{2}z' - \dfrac{3}{2}$ et f est une transformation du plan dont l'écriture complexe est $z \mapsto \dfrac{1}{2}z - \dfrac{3}{2}$.

b) De $z' = 2(1 + i)z + 2 + 3i$, on déduit $z = \dfrac{1 - i}{4}z' + \dfrac{-5 - i}{4}$ et f est une transformation du plan dont l'écriture complexe est $z \mapsto \dfrac{1 - i}{4}z + \dfrac{-5 - i}{4}$.

c) De $z' = e^{i\frac{\pi}{4}}z + 1 - i$, on déduit $z = e^{-i\frac{\pi}{4}}z' + i\sqrt{2}$, c'est-à-dire que f est une transformation du plan dont l'application réciproque a pour écriture complexe $z \mapsto e^{-i\frac{\pi}{4}}z + i\sqrt{2}$.

6 Tous les points de même ordonnée ont la même image. Ainsi f ne peut pas être une transformation du plan.

7 **a)** La rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$.
b) La translation de vecteur $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$.
c) L'homothétie de centre I et de rapport $-\dfrac{1}{2}$.

8 **a)** $f \circ g$ est l'homothétie de centre O et de rapport – 2.
En effet, si $M' = g(M)$ et $M'' = f(M')$, $\overrightarrow{OM'} = 3\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM''} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{OM'}$, soit $\overrightarrow{OM''} = -2\overrightarrow{OM}$.

b) $f \circ g$ est la rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{6}$.
En effet, si $M' = g(M)$ et $M'' = f(M')$,

OM = OM′ et OM′ = OM″

(OOM, OOM′) = et (OOM′, EOM″) = –

Donc, en définitive, $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM''}) = \dfrac{\pi}{3} + \left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = -\dfrac{\pi}{6}$.

9 En reprenant l'exercice précédent (**b)**), $r_2 \circ r_1$ est une rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3} + \theta$.

a) $r_2 \circ r_1$ est l'identité si et seulement si $\dfrac{\pi}{3} + \theta = 0\ [2\pi]$, soit $\theta = -\dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

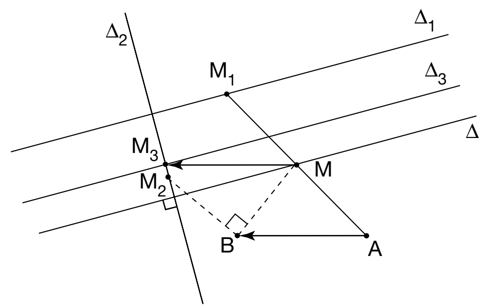
b) $r_2 \circ r_1$ est une symétrie de centre O si et seulement si $\dfrac{\pi}{3} + \theta = \pi\ [2\pi]$, soit $\theta = \dfrac{2\pi}{3}\ [2\pi]$.

10 **1.** • L'image d'une droite par h est une droite parallèle : il suffit donc de déterminer l'image M_1 d'un point de Δ et $\Delta_1 // \Delta$.

• L'image de Δ par r est une droite : il suffit donc de déterminer les images M_2 et N_2 de deux points M et N de Δ.
De plus, par le quart de tour, $(\Delta, \Delta_2) = \dfrac{\pi}{2}$ soit $\Delta_2 \perp \Delta$.

Remarque : Placer le point M_2 et mener la perpendiculaire à Δ suffit.

Enfin, l'image d'une droite par une translation est une droite parallèle : il suffit donc de déterminer l'image M_3 d'un point M de Δ et $\Delta_3 // \Delta$.



2. Comme $\Delta_1 \parallel \Delta$, $\Delta_2 \perp \Delta$ et $\Delta_3 \parallel \Delta$, il vient $\Delta_1 \perp \Delta_2$, $\Delta_1 \parallel \Delta_3$.

11 **1.** D'après la rotation :

$$AB' = AB \text{ et } (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB'}) = \frac{\pi}{3},$$

$$AC' = AC \text{ et } (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC'}) = \frac{\pi}{3},$$

d'où la construction.

2. Comme ABC est un triangle rectangle isocèle direct :

$$AB = AC \text{ et } (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}.$$

D'où $AB' = AC'$,

$$(\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{AC'}) = (\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC'})$$
$$= -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}.$$

$AB'C'$ est donc un triangle rectangle isocèle en A et direct.

12 **1.** $BA = BA'$ et $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BA'}) = \frac{\pi}{2}$;
$BC = BC'$ et $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BC'}) = \frac{\pi}{2}$,
d'où la construction.

2. D'après la rotation (ici quart de tour), $(BA) \perp (BA')$ et $(A'C') \perp (AC)$.
D'autre part, les triangles ABC et ABC′ sont isométriques ($\widehat{CBA} = \widehat{ABC'} = 45°$, $BC = BC'$ et $AB = AB$), donc $\widehat{BAC'} = 90°$ et $ABA'C'$ est un rectangle.
De plus, $AB = BA'$ et $ABA'C'$ est un carré.

13 **1.** • $\Delta' = \Delta$ puisque le centre C est un point de Δ.
• Pour construire l'image du cercle $\mathscr{C}$, on construit les images de A et B, soit A′ et B′ et $\mathscr{C}'$ est le cercle de centre B′ et de rayon B′A′.

2. L'image d'une droite par h est une droite parallèle, donc $(B'A') \perp (A'C)$ et la droite Δ' est tangente à $\mathscr{C}'$.

14 $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'C'} = k\overrightarrow{AC}$.
En effet, si I est le centre de l'homothétie, $\overrightarrow{IA'} = k\overrightarrow{IA}$, $\overrightarrow{IB'} = k\overrightarrow{IB}$, donc $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A'I} + \overrightarrow{IB'} = k\overrightarrow{AI} + k\overrightarrow{IB} = k\overrightarrow{AB}$.
Alors $\overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{A'C'} = (k\overrightarrow{AB}) \cdot (k\overrightarrow{AC}) = k^2\, \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

2. Définition. Conséquences

15 *Corrigé dans la manuel.*

16 On procède comme à l'exercice précédent :
$$M_1M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\ ;$$
$$M'_1M'_2 = \sqrt{(-x_2 + x_1)^2 + (-y_2 + y_1)^2} = M_1M_2.$$
De la conservation de la distance, on déduit que f est une isométrie.

Remarque : f est une symétrie de centre I(1,2) donc c'est une isométrie.

17 Comme précédemment :
$$M_1M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$
$$M'_1M'_2 = \sqrt{\begin{aligned}&[2(x_2 - x_1)^2 + 2(y_2 - y_1)^2 + 4(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)]\\ &+[2(x_2 - x_1)^2 + 2(y_2 - y_1)^2 - 4(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)]\end{aligned}}$$
$$= 2M_1M_2.$$
f est une similitude de rapport 2.

18 $M'_1M'_2 = |z'_2 - z'_1| = 2|z_2 - z_1| = 2M_1M_2$ donc f est une similitude de rapport 2.

Remarque : f est une homothétie de rapport 2.

19 $M'_1M'_2 = |z'_2 - z'_1| = |2(1 + i)(z_2 - z_1)| = 2\sqrt{2}\ M_1M_2$;
f est une similitude de rapport $2\sqrt{2}$.

20 $M'_1M'_2 = |z'_2 - z'_1| = \left|\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})(z_2 - z_1)\right| = |z_2 - z_1|$
$= M_1M_2$.
f est une isométrie, ou une similitude de rapport 1.

21 $M'_1M'_2 = |z'_2 - z'_1| = |z_2 - z_1| = M_1M_2$ et f est une isométrie, donc une similitude de rapport 1.

Remarque : f est une translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $-3 - 2i$.

22 Parce qu'elle multiplie les longueurs par 3.

23 *Corrigé dans le manuel.*

24 Soit M et N deux points distincts du plan, M″ et N″ leurs images par l'application f considérée.
On note $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) = \theta$.
D'après la configuration, on a :

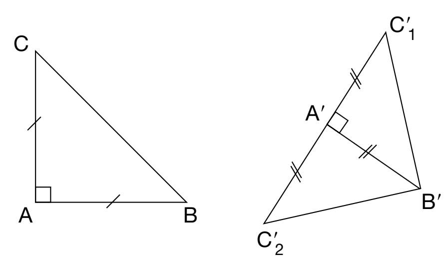
$$\begin{cases} OM'' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}OM \\ (IOM, EOM'') = -\dfrac{\pi}{4} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} ON'' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}ON \\ (ION, OON'') = -\dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$(\overrightarrow{OM''}, \overrightarrow{ON''}) = (\overrightarrow{OM''}, \overrightarrow{OM}) + (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) + (\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{ON''})$$
$$= \frac{\pi}{4} + \theta + \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \theta,$$

donc on utilise Al-Kaski dans les triangles.
(OMN) : $MN^2 = OM^2 + ON^2 - 2OM \times ON \times \cos\theta$;
$(OM'N')$: $M'N'^2 = OM'^2 + ON'^2 - 2OM' \times ON' \times \cos\theta$
$= \frac{1}{2}[OM^2 + ON^2 - 2OM \times ON \times \cos\theta]$.

$M'N' = \frac{\sqrt{2}}{2}$ MN et f est une similitude de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

25 Comme la similitude multiplie les longueurs par $k = \frac{A'B'}{AB}$, le point C′ est tel que :
$$A'C' = \frac{A'B'}{AB}AC = A'B' :$$
C′ appartient au cercle de centre A′ et de rayon A′B′.
D'autre part, l'angle $\widehat{BAC}$ est droit, donc $\widehat{B'A'C'}$ est droit et il est possible de trouver deux points C′.



3. Caractérisation complexe d'une similitude

26 **1.** $z' = z \Leftrightarrow z - \bar{z} = 4i \Leftrightarrow 2i\,\mathrm{Im}(z) = 4i \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z) = 2$
$\Leftrightarrow y = x + 2i$.

L'ensemble des invariants est donc la droite d'équation $y = 2$.

2. s est une similitude, différente de l'application identique, ayant une droite d'invariants d. C'est la réflexion d'axe d.

27 1. $z' = z \Leftrightarrow z - (1 + 2i)\bar{z} = 5 - 6i$ et, en prenant le conjugué,

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z - (1+2i)\bar{z} = 5 - 6i \\ (-1+2i)z + \bar{z} = 5 + 6i \end{cases} \Leftrightarrow z = \frac{1}{2} - \frac{5}{2}i.$$

2. s ne peut pas être une réflexion puisqu'elle n'a qu'un point invariant, le point A d'affixe $\frac{1}{2} - \frac{5}{2}i$.

28 1. Le rapport de la similitude est :

$$k = |2 + 3i| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}.$$

2. Un point invariant, s'il existe, est tel que $z = z'$, soit $z = -2 + i$.

29 a) Le rapport est $k = |2i| = 2$ et le point I d'affixe $-2 + i$ est invariant : il ne s'agit donc pas d'une réflexion ($k \neq 1$).

b) Le rapport est $k = |1 - 2i| = \sqrt{5}$ et le point I d'affixe $2 + \frac{3}{2}i$ est invariant. Il ne s'agit donc pas d'une réflexion puisque $k \neq 1$.

c) Le rapport est $k = |1 + i\sqrt{3}| = 2$ et le point I d'affixe $1 + i$ est invariant.

Il ne s'agit pas d'une réflexion puisque $k \neq 1$.

d) Le rapport est $k = |i| = 1$ et l'ensemble des invariants est une droite d'équation $x - y - 1 = 0$. C'est donc une réflexion.

e) Le rapport est $k = |4i - 3| = 5$, donc il ne s'agit pas d'une réflexion et il existe un point invariant : le point I d'affixe $-3i$.

4. Les similitudes directes

30 1. On note $z' = x' + iy' = (-2y + 1) + i(2x + 4)$
$= 2i(x + iy) + 1 + 4i = 2iz + 1 + 4i.$

L'application est donc la similitude de centre Ω, d'affixe $\omega = -\frac{7}{5} + \frac{6}{5}i$, de rapport $k = |2i| = 2$ et d'angle $\arg 2i = \frac{\pi}{2}$.

31 $z' = x' + iy' = (x - \sqrt{3}y + 1) + i(\sqrt{3}x + y + \sqrt{3})$
$= x(1 + i\sqrt{3}) + iy(+i\sqrt{3} + 1) + 1 + i\sqrt{3}$
$= (1 + i\sqrt{3})z + 1 + i\sqrt{3}.$

f est la similitude de centre Ω, d'affixe $\omega = -1 + \frac{1}{\sqrt{3}}i$, de rapport $k = |1 + i\sqrt{3}| = 2$ et d'angle $\arg(1 + i\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$.

32 $z' = x' + iy' = (x + y) + i(-x + y + 1))$
$= x(1 - i) + iy(-i + 1) + i = (1 - i)z + i.$

f est la similitude de centre Ω, d'affixe $\omega = 1$, de rapport $k = |1 - i| = \sqrt{2}$ et d'angle $\arg(1 - i) = -\frac{\pi}{4}$.

33 *Corrigé dans le manuel.*

34 On procède comme à l'exercice précédent :

$$\begin{cases} 1 + 3i = a(-1+3i) + b \\ 1 - i = a(1+i) + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 - i \\ b = -1 - i \end{cases},$$

$z' = (1 - i)z - 1 - i.$

35 • *Avec les données de l'exercice 33* :

Puisque [AB] a pour image [A′B′], il est possible que :

– A ↦ A′ et B ↦ B′, soit d'après le **33**,

$$z' = (1 + 3i)z + (2 - 2i);$$

– A ↦ B′ et B ↦ A′, on résout alors le système :

$$\begin{cases} -1 - i = a(1+i) + b \\ 2i = a(i) + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = (-1-3i) \\ b = -3 + 3i \end{cases}$$

soit $z' = (-1 - 3i)z - 3 + 3i$.

• *Avec les données de l'exercice 34 :*

De la même manière, on trouve :

– la similitude directe du **34**, $z' = (1 - i)z - 1 - i$;

– celle telle que A ↦ B′ et B ↦ A′ :

$$\begin{cases} 1 - i = a(-1+3i) + b \\ 1 + 3i = a(1+i) + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 + i \\ b = 3 + 3i \end{cases}$$

soit $z' = (-1 + i)z + 3 + 3i$.

36 Une similitude directe multiplie les longueurs par k et conserve les angles orientés. Donc :

$\overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{A'C'} = A'B' \times A'C' \times \cos(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'})$
$= kAB \times kAC \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$
$= k^2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}.$

5. Forme réduite d'une similitude directe

37 *Corrigé dans le manuel.*

38 a) Centre $I\left(\frac{3}{4}i\right)$, rapport $k = 5$, angle $\theta = 0$ (homothétie de rapport 5).

b) Centre $I(1 - 2i)$, rapport $k = 3$, angle $\theta = \pi$ (homothétie de rapport -3).

39 a) Centre $I(i)$, rapport $k = \sqrt{2}$, angle $\theta = \frac{\pi}{4}$.

b) Centre $I(1 + i)$, rapport $k = 2\sqrt{2}$, angle $\theta = \frac{3\pi}{4}$.

40 a) $z' = iz + 2i$, centre $I(-1 + i)$, rapport $k = 1$, angle $\theta = \frac{\pi}{2}$.

b) $z' = \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i\right)z$, centre O, rapport $k = \frac{\sqrt{10}}{2}$, angle θ tel que $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{10}}$ et $\sin\theta = \frac{-3}{\sqrt{10}}$; $\theta \approx -1{,}25$ rad.

41 a) Centre $I\left(\frac{i}{\sqrt{3}}\right)$, rapport $k = 2$, d'angle $\theta = \frac{\pi}{3}$.

b) Centre $I\left(\frac{7}{4} - \frac{1}{4}i\right)$, rapport $k = \sqrt{5}$, d'angle $\theta \approx 2{,}03$ rad $\left(\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{5}};\ \sin\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

42 $z' - 1 - i = 2e^{i\frac{\pi}{3}}(z - 1 - i) \Leftrightarrow$

$z' = (z - 1 - i)(1 + i\sqrt{3}) + 1 + i$
$= (1 + i\sqrt{3})z + \sqrt{3} - i\sqrt{3}.$

43 $z' + 1 - 2i = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}}(z + 1 - 2i) \Leftrightarrow$

$$z' = (1 - i)(z + 1 - 2i) - 1 + 2i$$
$$= (1 - i)z - 2 - i.$$

44 $z' - 1 + i = 3\mathrm{e}^{i\pi}\,(z - 1 + i) \Leftrightarrow z' = -3(z - 1 + i) + 1 - i$
$= -3z + 4 - 4i.$

45 *Corrigé dans le manuel.*

46 $(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}) = \frac{\pi}{3}$.

1. Rapport : $\frac{1}{2}$; angle : $-\frac{\pi}{3}$.

2. Rapport : $\sqrt{3}$; angle : $\frac{\pi}{2}$.

3. Rapport : $\frac{\sqrt{3}}{3}$; angle : $\frac{\pi}{6}$.

47 1. La somme des angles d'un triangle est égale à π, donc $\hat{\mathrm{C}} = \frac{\pi}{6} = \hat{\mathrm{B}}$.

2. $\mathrm{BC} = a\sqrt{3}$ (appliquer la formule :
$$\mathrm{BC}^2 = \mathrm{AC}^2 + \mathrm{AB}^2 - 2\mathrm{AC} \times \mathrm{AB} \times \cos\hat{\mathrm{A}}).$$

3. ABK est isocèle et $(\overrightarrow{\mathrm{AK}}, \overrightarrow{\mathrm{AB}}) = -\frac{\pi}{6}$, $\mathrm{AK} = \frac{a}{\sqrt{3}}$, donc :
– rapport de s_1 : $\frac{\sqrt{3}}{3}$;
– angle de s_1 : $-\frac{\pi}{6}$.

4. $(\overrightarrow{\mathrm{KA}}, \overrightarrow{\mathrm{KC}}) = -\frac{\pi}{3}$, $\mathrm{KC} = 2a\frac{\sqrt{3}}{3}$, donc :
– rapport de Δ_2 : 2;
– angle de s_2 : $-\frac{\pi}{3}$.

48 1. $\begin{cases} h \circ r(\mathrm{B}) = \mathrm{J} \\ r \circ h(\mathrm{B}) = \mathrm{J} \end{cases}$ car $\begin{matrix} \mathrm{AJ} = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{AB} \\ (\mathrm{IAB}, \mathrm{UAJ}) = \frac{\pi}{6} \end{matrix}$

2. $\begin{cases} h \circ r(\mathrm{I}) = \mathrm{A} \\ r \circ h(\mathrm{I}) = \mathrm{A} \end{cases}$ car $\begin{matrix} \mathrm{CA} = \frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{CI} \\ (\mathrm{UCI}, \mathrm{ZCA}) = -\frac{\pi}{6} \end{matrix}$

3. $\begin{cases} h \circ r(\mathrm{A}) = h(\mathrm{C}) = \mathrm{I} \\ r \circ h(\mathrm{A}) = r(\mathrm{J}) = \mathrm{I} \end{cases}$

49 Comme $\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{AO}} = \sqrt{2}$ et $\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}} = \sqrt{2}$, et $(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}) = \frac{\pi}{4}$ et $(\overrightarrow{\mathrm{AO}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}}) = \frac{\pi}{4}$, il existe une similitude directe de centre A, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$ transformant A en A, B en C et O en D.

50 1. On note a la mesure du côté du losange.
Dans le triangle équilatéral ADB, $\mathrm{DB} = a$ et $\mathrm{AO} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, d'où $\mathrm{AC} = a\sqrt{3}$.
Le rapport de la similitude est $\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, l'angle est $\theta = \frac{\pi}{6}$.

2. Le milieu O de [AC] se transforme en le milieu de [BC].

3. Soit $\mathrm{D}' = s(\mathrm{D})$; de $(\overrightarrow{\mathrm{CD}}, \overrightarrow{\mathrm{CD}'}) = \frac{\pi}{6}$, on déduit que D′ appartient à la demi-droite [CA).

De plus, $\mathrm{CD}' = \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{CD} = \frac{1}{\sqrt{3}}a = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{CO}\right)$ et D′ est bien le centre de gravité du triangle BCD.

51 L'écriture complexe de la similitude directe est $z' = az + b$. Avec les hypothèses, on a :

$$\begin{cases} 2 + 2i = a \cdot i + b \\ -1 - i = a \cdot 3i + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}i \\ b = \frac{7}{2} + \frac{7}{2}i \end{cases}$$

D'où $z' = \left(-\frac{3}{2} + \frac{3}{2}i\right)z + \frac{7}{2} + \frac{7}{2}i$.
Le centre est le point invariant I, d'affixe $\frac{14}{34} + \frac{56}{34}i$.
Le rapport est $k = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ et l'angle $\theta = \frac{3\pi}{4}$.

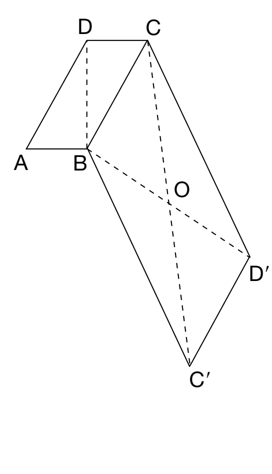
52 L'image d'un cercle $\mathscr{C}$ par une similitude est un cercle dont le centre est l'image du centre et dont le rayon a été multiplié par le rapport de la similitude.
Recherche de l'écriture complexe de la similitude :
$$z' = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}z = (1 + i)z,$$
I d'affixe $(1 + 2i)$ devient I′ d'affixe $(-1 + 3i)$.
Le rayon de $\mathscr{C}$ est $\sqrt{2}$, celui de $\mathscr{C}'$ est 2.
Alors une équation cartésienne de $\mathscr{C}'$ est :
$$(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 4.$$

53 Pour construire l'image du carré, il suffit de construire l'image des deux points O et A.
En effet, la similitude conservant le milieu, et transformant deux droites perpendiculaires en deux droites perpendiculaires, nous pourrons en déduire les autres points.
O est invariant.
A′ est tel que $\mathrm{OA}' = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{OA}$ et $(\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OA}'}) = \frac{\pi}{4}$.
A′ est la projection orthogonale de O sur [AB] ou milieu de [AB]. C'est donc le milieu de [CD]. Les diagonales étant de même longueur et perpendiculaires, D′ est le milieu de (DA) et B′ est le milieu de [BC].

54 1. $\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{BA}} = \frac{2}{1}$ donc le rapport est 2.
$(\overrightarrow{\mathrm{BA}}, \overrightarrow{\mathrm{BC}}) = (\overrightarrow{\mathrm{BA}}, \overrightarrow{\mathrm{BD}}) + (\overrightarrow{\mathrm{BD}}, \overrightarrow{\mathrm{BC}}) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = -\frac{2\pi}{3}$, donc l'angle est $-\frac{2\pi}{3}$.

2. Par s : $\mathrm{B} \mapsto \mathrm{B}$, $\mathrm{A} \mapsto \mathrm{C}$ et $\mathrm{C} \mapsto \mathrm{C}'$ avec :
$$\begin{cases} (\mathrm{IBC}, \mathrm{IBC}') = -\frac{2\pi}{3} \\ \mathrm{BC}' = 2\mathrm{BC} \end{cases}$$

Si on appelle O le milieu de [CC′], alors le point $\mathrm{D}' = s(\mathrm{D})$ est tel que O milieu de [BD′].



55 **a)** $M \overset{s}{\mapsto} M' \overset{h}{\mapsto} M''$ avec :

$$\overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{OM} \text{ et } \overrightarrow{OM''} = -2\overrightarrow{OM'}.$$

Donc $\overrightarrow{OM''} = 2\overrightarrow{OM}$ et $h \circ s$ est une homothétie (de centre O) de rapport 2 ou une similitude directe de centre O, de rapport 2 et d'angle nul.

b) $M \overset{r}{\mapsto} M' \overset{h}{\mapsto} M''$ avec :

$$\begin{cases} OM = OM' \\ (OOM, OOM') = \frac{2}{3} \end{cases}$$

et

$$\overrightarrow{OM''} = -2\overrightarrow{OM}.$$

Donc $\begin{cases} OM'' = 2OM \\ (OOM, EOM'') = - \end{cases}$ et $h \circ r$ est une similitude de centre O, de rapport 2 et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

c) $M \overset{s}{\mapsto} M' \overset{r}{\mapsto} M''$ avec :

$$OM' = -OM \text{ et } \begin{cases} OM'' = OM' \\ (OOM', EOM'') = \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

Donc $\begin{cases} OM'' = OM \\ (OOM, EOM'') = -\frac{2r}{3} \end{cases}$

$h \circ s$ est la similitude de centre O, de rapport 1 et d'angle $-\frac{\pi}{3}$, soit la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

pour apprendre à chercher (page 119)

56 Image d'un point par une similitude

Les outils :

- Cercle circonscrit à un triangle rectangle.
- Définition de la similitude.
- Conservation de l'orthogonalité.

Les objectifs :

- Savoir trouver l'image d'un point par une similitude.

1. Comme $\begin{cases} B \mapsto A \\ A \mapsto C \end{cases}$ la similitude existe ; son rapport est $k = \frac{AC}{AB}$ et son angle est :

$$(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + \pi = -\frac{\pi}{2} [2\pi].$$

2. I est un point invariant. En utilisant les points et leurs images, il vient :

a) $(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IA}) = -\frac{\pi}{2}$ et $(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IC}) = -\frac{\pi}{2}$.

b) Un cercle de diamètre [MN] étant l'ensemble des points P tels que $(\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{PN}) = \frac{\pi}{2} [\pi]$, on déduit que le point I appartient aux cercles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ de diamètres respectifs [AB] et [AC].

c) Ces deux cercles se coupent en A et H. Comme le centre de la similitude n'est pas A (A a pour image C), il reste I = H.

3. a) L'image de (HM) est une droite perpendiculaire, car $\theta = -\frac{\pi}{2}$, passant par H : c'est (HN).
L'image de (AB) est la droite (CA).

b) M est l'intersection des droites (HM) et (AB), M′ est l'intersection de leurs images (HN) et (AC) :

$$M' = s(M) = N.$$

57 Problème de lieu géométrique

Les outils :

- Image d'un point par une similitude ; définition.
- Image d'un cercle par une similitude.

Les objectifs :

- Savoir trouver un ensemble de points.

1. Si on admet que le triangle CNM est rectangle et isocèle direct, il vient $(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CI}) = -\frac{\pi}{4}$ et $\frac{CI}{CM} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Donc par la similitude directe de centre C, de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$, M a pour image I.

2. a) L'image du cercle $\mathscr{C}_1$ par la rotation $r\left(C, -\frac{\pi}{2}\right)$ est un cercle de centre D = r(B) et de même rayon : c'est $\mathscr{C}_2$.

b) De plus, par r, l'image de (CM) est (CN). Donc M, intersection de $\mathscr{C}_1$ et (CM), a pour image N, intersection de $\mathscr{C}_2$ et (CN).

c) On en déduit que $(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CN}) = -\frac{\pi}{2}$ et CM = CN, soit CNM′ est un triangle rectangle isocèle direct.

3. L'image du cercle $\mathscr{C}_1$ par la similitude $s = s\left(C, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\pi}{4}\right)$ est un cercle, dont le centre est s(B) et le rayon est $\frac{\sqrt{2}}{2}$ BC. Si on appelle O le centre du carré, on a O = s(B) et OC = $\frac{\sqrt{2}}{2}$ BC.

L'ensemble $\mathscr{L}$ est donc le cercle circonscrit à ABCD.

Remarque : Tout point de $\mathscr{L}$ est bien l'image d'un point de $\mathscr{C}_1$ par s.

58 Problème de construction

Les outils :

- Définition de la similitude et image d'un point.
- Image d'une droite par une similitude.
- Conservation de l'orthogonalité.

Les objectifs :

- Savoir résoudre un problème de construction.

1. a) Le triangle INM est isocèle, rectangle et indirect, donc $(\overrightarrow{IN}, \overrightarrow{IM}) = -\frac{\pi}{4}$ et $\overrightarrow{IM} = \frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{IN}$.

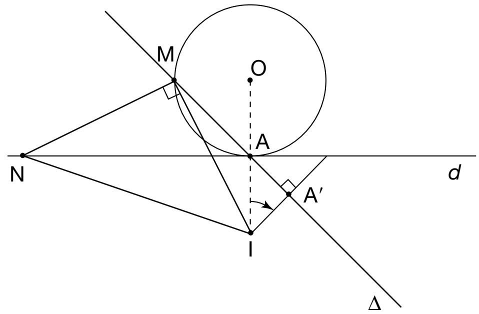
Donc M est l'image de N par la similitude directe de centre I, d'angle $-\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

b) N appartient à la droite d, donc M appartient à la droite Δ image de d par s.

2. a) et **b)** Pour tracer Δ :

- on construit A′ = s(A) tel que $\begin{cases}(\mathrm{UIA}, \mathrm{UIA}') = - \\ \mathrm{IA}' = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{IA}\end{cases}$
- comme $d \perp$ (IA), alors $\Delta \perp$ (IA′). (*Remarquons que* Δ = (AA′).)

c) M appartient à $\mathscr{C}$ et à Δ donc il appartient à l'intersection. M ne peut pas être le point A puisque l'antécédent de A n'appartient pas à d : M est donc unique.
On place ensuite N = s^{-1}(M).
La construction des points M et N est unique et on obtient donc une solution au problème posé.



59 **Démontrer avec les complexes**

Les outils :

- Écriture complexe d'une similitude directe.
- Existence d'une similitude dont on connaît les images de deux points.

Les objectifs :

- Savoir utiliser les écritures complexes pour démontrer.

1. Par la similitude directe s_{O} : $a' = ua$ et $b' = ub$.

2. a) Par la similitude s_{A} : $\begin{cases}\mathrm{A} \mapsto \mathrm{A} \\ \mathrm{B} \mapsto \mathrm{B}'\end{cases}$

L'écriture complexe est :

$$z' - a = \left(\frac{b' - a}{b - a}\right)(z - a), \text{ soit } z' = \frac{a - ub}{a - b}z + \frac{ab(u-1)}{a-b}.$$

b) De la même manière, s_{B} : B ↦ B et A ↦ A′, et :

$$z' = \frac{ua - b}{a - b}z + \frac{ab(-u+1)}{a-b}.$$

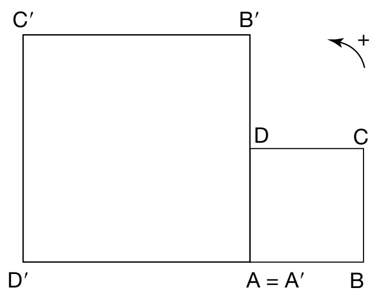
c) Les images P et Q ont pour affixes :

$$z_{\mathrm{P}} = \frac{ab(u-1)}{a-b} \text{ et } z_{\mathrm{Q}} = \frac{ab(-u+1)}{a-b}, \text{ soit } z_{\mathrm{P}} + z_{\mathrm{Q}} = 0.$$

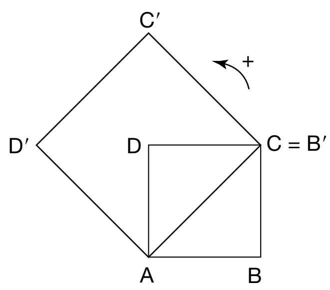
O est le milieu de [PQ].

pour progresser (page 121)

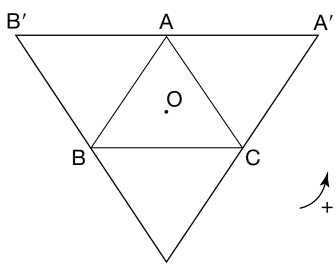
60 **1.**



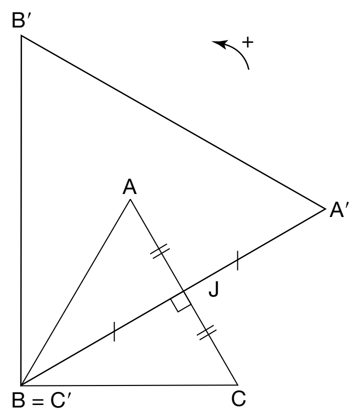
2.



61



62



63 • f(D) est la droite (A′B′), A′$(7 - 5i)$, B′$(-1 - 6i)$.
• $f(\mathscr{C})$ est le cercle de centre I′$(5 - 4i)$, de rayon 5.

64 • $f(\mathscr{C}_1)$ est le cercle de centre I′$(5 + 2i)$, de rayon 4.
• $f(\mathscr{C}_2)$ est le cercle de centre O′ (-3), de rayon 2.
• $f(d)$ est la droite d' passant par les points communs à $\mathscr{C}'_1$ et $\mathscr{C}'_2$.
d a pour équation $2x + 2y - 1 = 0$ et $d' : x - y + 2 = 0$.

65 • $f(\mathscr{C})$ est le cercle passant par f(O) = O et centré en A′ d'affixe $\sqrt{3} + 1 + i(\sqrt{3} - 1)$.
• $f(d)$ est la droite passant par A′ et B′ $(-4 - 4i\sqrt{3})$.

★**66** **1.** Les affixes des points A, B, C, D, A_1, B_1 sont respectivement $0, 1, 1 + i, i, \frac{1}{3}, 1 + \frac{2}{9}i$.
s étant une similitude directe son écriture complexe est de la forme $z' = az + b$.

$\begin{cases} A_1 = s(A) \\ B_1 = s(B) \end{cases}$ donne $\begin{cases} \frac{1}{3} = b \\ 1 + \frac{2}{9}i = a + b \end{cases}$ soit $\begin{cases} a = \frac{2}{3} + \frac{2}{9}i \\ b = \frac{1}{3} \end{cases}$

$z' = \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{9}i\right)z + \frac{1}{3}$.

2. Si $D_1 = s(D)$, $z_{D_1} = \frac{1}{9} + \frac{2}{3}i$;

$z_{\overrightarrow{DA_1}} = \frac{1}{3} - i$;

$z_{\overrightarrow{DD_1}} = \frac{1}{9} - \frac{1}{3}i = \frac{1}{3}z_{\overrightarrow{DA_1}}$.

Et les points A_1, D et D_1 sont alignés. De plus, $\overrightarrow{DD_1} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA_1}$ prouve que le point D_1 appartient au segment [AD].

3. C est le quatrième sommet du carré, $C_1 = s(C)$ est le quatrième sommet du carré $A_1B_1C_1D_1$.
On peut alors, pour construire C_1, utiliser les droites perpendiculaires ou les segments de même longueur.

★**67** **1. a)** $s(A) = A$.

b) Le rapport est $\frac{\sqrt{3}}{2}$, l'angle est $\frac{\pi}{6}$.

2. Si $M' = s(M)$, on a $AM' = \frac{\sqrt{3}}{2}AM$ et $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}) = \frac{\pi}{6}$.

La propriété d'Al-Kashi donne $MM' = \frac{1}{2}AM$, puis ce triangle vérifie la relation de Pythagore,

$$AM^2 = AM'^2 + MM'^2.$$

AMM′ est bien rectangle en M′.

3. L'image de $\mathscr{C}$ est $\mathscr{C}'$ de centre O′, d'affixe :

$$z_{O'} = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$$

et de rayon $r' = \frac{\sqrt{3}}{2}$. O′ est bien élément du cercle $\mathscr{C}$ car $OO' = 1$. D'autre part, si on appelle H la projection orthogonale de O′ sur l'axe $(O, \vec{u})$, $O'H = \frac{\sqrt{3}}{2}$, ce qui prouve que $\mathscr{C}'$ est tangente à l'axe des abscisses.

Déterminer une similitude

★**68** **1.** $S_1 : Z_1 = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}Z + 2 - i\sqrt{3}$;

$S_2 : Z_2 = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}Z + \frac{\sqrt{3} + 3i}{4}$.

2. a) $T : Z' = -Z + \frac{5 + \sqrt{3} + i(3 + \sqrt{3})}{4}$.

b) Symétrie centrale de centre $C\left(\frac{5 + \sqrt{3}}{8}; \frac{3 + \sqrt{3}}{8}\right)$.

c) $\begin{cases} x' = -x + \frac{5\sqrt{3}}{4} \\ y' = -y + \frac{3 + \sqrt{3}}{4} \end{cases}$

★**69** *Corrigé dans le manuel.*

★**70** **1. a)** f est une translation $\Leftrightarrow u \in \{-1; 1\}$.

b) f rotation d'angle $\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \arg u^2 = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$

$\Leftrightarrow \arg u = \frac{\pi}{4} \pmod{\pi}$

$\Leftrightarrow u = \lambda\,(1 + i), \lambda \in \mathbb{R}^*$.

c) f homothétie de rapport $-2 \Leftrightarrow u^2 = -2$

$\Leftrightarrow u \in \{i\sqrt{2}; (-i\sqrt{2})\}$.

2. $Z' = -2iZ - i$.
Similitude de centre $\Omega\left(\frac{-2 - i}{5}\right)$, rapport 2, angle $-\frac{\pi}{2}$.

★**71** **1.** $a = \frac{4 + (1 + \lambda)i}{4 - 3i}$.

2. a) $a = 1 \Leftrightarrow \lambda = -4$.

b) $|a| = 1, a \neq 1 \Leftrightarrow |1 + \lambda| = 3, \lambda \neq -4 \Leftrightarrow \lambda = 2$.

c) $\arg a = +\frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow \mathrm{Re}(a) = 0$ et $\mathrm{Im}(a) < 0$.

$a = \frac{(13 - 3\lambda) + i(16 + 4\lambda)}{25}$; d'où $13 - 3\lambda = 0$ et $16 + 4\lambda < 0$: incompatibles.

★**72** **1.** $z' = 2iz$.

2. $z_I = \frac{1}{2}(z + 2iz) = \frac{1 + 2i}{2}z$, donc I est l'image de M par la similitude directe de centre O, de rapport $\left|\frac{1 + 2i}{2}\right| = \frac{\sqrt{5}}{2}$ et d'angle θ défini par $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$ et $\sin\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$, soit $\theta \approx 1{,}11$ radians.

Vrai ou faux ?

73 **Faux :** si $k > 0$, l'homothétie de rapport k est la similitude de rapport k et d'angle 0.
Si $k < 0$, l'homothétie de rapport k est la similitude de rapport $-k$ et d'angle π.

74 **Faux :** l'angle est $\arg\left[1 - \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}}\right]$ soit $-\frac{2\pi}{3}$.

75 **Vrai :** par la similitude,

$$OM' = 2OM \text{ et } (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \frac{\pi}{2}.$$

Donc la propriété de Pythagore donne $MM' = \sqrt{5}\,OM$.

76 **Vrai :** $h(O, -\sqrt{3}) = s(O, \sqrt{3}, \pi)$

et $r\left(O, \frac{\pi}{3}\right) = s\left(O, 1, \frac{\pi}{3}\right)$,

donc $s = s\left(O, \sqrt{3}, \frac{4\pi}{3}\right)$ ou $s\left(O, \sqrt{3}, -\frac{2\pi}{3}\right)$.

76 **Vrai :** La similitude a pour rapport $\frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{OD}{OB}$ et pour angle $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OD}) = \frac{3\pi}{4}$.
Si on appelle Ω le centre du carré,

$$O\Omega = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}OC \text{ et } (\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{O\Omega}) = \frac{3\pi}{4}.$$

Démontrer avec les similitudes

★**78** **1.** L'angle est $(\overrightarrow{A'C}, \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \frac{\pi}{4}$.

$\frac{CB}{A'C} = \frac{CB}{AC} = \sqrt{2}$.

2. (AC) = (A′C). L'image de (AC) par S est (CB).

3. $s(C) = B \Leftrightarrow (\overrightarrow{\Omega C}, \overrightarrow{\Omega B}) = \frac{\pi}{4}$ et $\Omega B = \sqrt{2}\,\Omega C$.

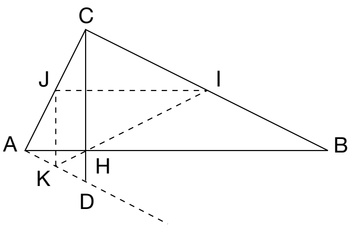
Le triangle ΩCB est donc rectangle isocèle en C, et direct. Ω est donc l'image de B dans la rotation de centre B, d'angle $\frac{\pi}{2}$.

★**79** **1. a)** $k = \frac{AC}{CB} = \frac{b}{a}$; $\theta = (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) + \pi = \frac{\pi}{2}$.

b) $(\overrightarrow{\Omega C}, \overrightarrow{\Omega A}) = \frac{\pi}{2}$; $(\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega C}) = \frac{\pi}{2}$.

Donc Ω est commun aux cercles de diamètre [AC] et [BC]. Deux points communs : C et H.

Or $s(C) = A$... reste H.



c) $A' = s(A)$.

• $(\overrightarrow{HA}, \overrightarrow{HA'}) = \frac{\pi}{2}$ donc $A' \in (HC)$.

• $(AC) \perp (BC)$ donc $(A'A) \perp (AC)$.

On déduit $A' = D$.

2. $\begin{cases} C \overset{s}{\mapsto} A \\ B \mapsto C \\ H \mapsto H \end{cases}$

$\frac{HC}{HB} = \frac{HA}{HC} = k$ d'où $HC^2 = HA \times HB$.

★**80** **1.** $s = s\left(C, \frac{\pi}{6}, \sqrt{3}\right)$.

De $A' = s(A)$ on déduit $CA' = \sqrt{3}\,CA$ et $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CA'}) = \frac{\pi}{6}$.

Si on appelle C_1 l'image de C par la réflexion d'axe (AB) alors $ACBC_1$ est un losange.

Donc $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CC_1}) = \frac{\pi}{6}$ et $CC_1 = \sqrt{3}\,CA$, soit $A' = C_1$.

2. Comme $B' = s(B)$, $CB' = \sqrt{3}\,CB$ et $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CB'}) = \frac{\pi}{6}$.

Le triangle ACB′ est donc rectangle et, d'après Pythagore, $AB' = 2AC$.

Le point B′ est défini par $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB'}) = -\frac{\pi}{3}$ et $CB' = 2CA$: B est le milieu de [AB′].

3. La similitude conserve le barycentre, l'image du centre de gravité du triangle ABC est le centre de gravité du triangle A′CB′.

De plus, (AB) est la médiane issue de B′ dans le triangle A′CB′ et B est situé au tiers de la médiane par rapport à la base. B est le centre de gravité du triangle A′CB′.

L'image, par s, du cercle circonscrit au triangle ABC est le cercle circonscrit au triangle A′CB′, soit le cercle de centre B et de rayon BC.

★**81** **1. a) et b)** $\cos(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OG}) = \frac{OM \cdot IOG}{OM \times OG} = \frac{\frac{2}{3} IOO' \cdot IOG}{OM \times \frac{2}{3} OO'}$.

Or, $OO' = OM \times \frac{\sqrt{5}}{2}$, d'où :

$$\cos(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OG}) = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

$(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OG}) = \theta$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, on déduit :

$$\sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

2. Similitude de centre O, d'angle θ, rapport $\frac{\sqrt{5}}{3}$.

★★**82** **2.** r transforme (BC) en la droite passant par $r(C) = D$ et perpendiculaire à (BC), c'est-à-dire (DO).

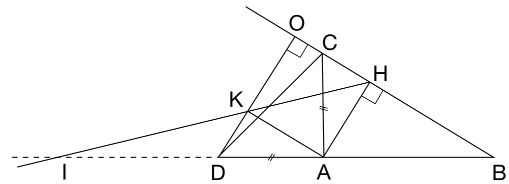
$r(A) = A$, $r(C) = D$, $H \in (BC)$, donc $r(H) \in (DO)$.

$(AH) \perp (BC)$ donc l'image de (AH) par r est la perpendiculaire à (DO) passant par $r(A) = A$, donc (AK).

$r(H) \in (DO) \cap (AK) = \{K\}$.

$r(H) = K$ donc $AH = AK$ et $(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{AK}) = \frac{\pi}{2}$.

AHOK est donc un rectangle avec deux côtés consécutifs de même longueur : c'est un carré.



3. Si (AB) // (HK), alors $(AB) \perp (AO)$ donc $(AO) = (AC)$, avec $O \in (BC)$ ... O = C. Dans ce cas :

$$AD = AC = AO$$

et DOB = DCB, rectangle en O.

On parvient alors à $(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CA}) = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \frac{\pi}{4}$ ce qui contredit l'hypothèse « ABC non isocèle ».

Donc (AB) et (HK) sécantes en un point I.

4. (KD) // (AH). Il existe une homothétie h de centre I, qui transforme K en H et D en A.

$A' = h(A)$;

• $A' \in (IA)$;

• A est sur la perpendiculaire en K à (DK) donc A′ est sur la perpendiculaire en H à (AH) : $A' \in (BC)$.

On déduit $A' \in (IA) \cap (BC) = \{B\}$ et $h(A) = B$.

5. a) $s(H) = H$; $s(C) = A$; $s(A) = B$.

b) s est une similitude directe :

– d'angle $\frac{\pi}{2}$;

– de rapport $k = \frac{AH}{KD} = \frac{AH}{HC} = \tan\widehat{ACB}$;

– de centre H.

★★**83** **1. a)** $\theta = \frac{\pi}{3}$, $k = \frac{1}{2}$.

b) $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA}) = \frac{\pi}{3}$ et $OA = \frac{1}{2} OC$.

c) $AM' = \frac{1}{2} CM$.

2. a) S_Δ transforme B en A, et M en M″ : $AM'' = BM$.

b) $M \in \Gamma \Leftrightarrow AM' = AM'' \Leftrightarrow AM' = BM$
$\Leftrightarrow MC = 2MB$.

c) $M \in \Gamma \Leftrightarrow (\overrightarrow{MC})^2 - 4(\overrightarrow{MB})^2 = 0$
$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MC} + 2\overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MB}) = 0$.

• J barycentre de (C, 1), (B, 2) et K barycentre de (C, 1), (B, – 2) :

$$M \in \Gamma \Leftrightarrow -3\overrightarrow{MJ} \cdot \overrightarrow{MK} = 0,$$

donc Γ est le cercle de diamètre [JK].

Ou encore avec G barycentre de (C, 1), (B, – 4) :

$M \in G \Leftrightarrow MC^2 - 4MB^2 = 0$
$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})^2 - 4(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 = 0$
$\Leftrightarrow -3MG^2 + GC^2 - 4GB^2 = 0$
$\Leftrightarrow -GM^2 = \frac{1}{3}(GC^2 - 4GB^2)$.

Γ est donc un cercle de centre G ; or OC = 2OB... donc $O \in \Gamma$: Γ est le cercle de centre G, passant par O.

Lieux géométriques et constructions

84 **1.** $|(1-i\sqrt{3})z-\sqrt{3}-i| = 4$ équivaut à :
$$|1-i\sqrt{3}|\left|z-\frac{\sqrt{3}+i}{1-i\sqrt{3}}\right| = 4\text{, soit } |z-i| = 2.$$
Si on note A le point d'affixe i, AM = 2 et $\mathscr{C}$ est le cercle de centre A et de rayon 2.

2. $\begin{cases} O = s(A) \\ B' = s(B) \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} O = ia+b \\ -4i = \sqrt{3}a+b \end{cases}$

Soit $z' = (1-i\sqrt{3})z+(-\sqrt{3}-i)$.

Le centre est Ω, d'affixe $\omega = -\frac{1}{\sqrt{3}}+i$, le rapport est 2, l'angle $-\frac{\pi}{3}$.

$|(1-i\sqrt{3})z-\sqrt{3}-i| = 4$ s'écrit $|z'| = 4$ et se traduit par «M′ appartient au cercle de centre O et de rayon 4». Par la similitude, M décrit le cercle de centre A, d'affixe i, et de rayon 2.

★**85** **1.** s est la similitude directe de centre Ω, d'affixe $2-i$, de rapport $|1+i\sqrt{3}| = 2$ et d'angle $\arg(1+i\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$.

2. $\arg[(1+i\sqrt{3})z-\sqrt{3}(1+2i)] = 0$ se traduit par $\arg z' = 0$.
Notons A l'antécédent du point O, c'est-à-dire O = s(A).

L'affixe de A est $a = \frac{\sqrt{3}}{4}[(1+2\sqrt{3})+i(2-\sqrt{3})]$.

Comme $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{OM'}) = \frac{\pi}{3}\ (\pi) = (\overrightarrow{AM}, \vec{u})$, M est sur la droite passant par A de vecteur directeur $\vec{w}$ avec $(\vec{u}, \vec{w}) = -\frac{\pi}{3}\ (\pi)$.

★**86** **2. a)** r(B) = C, r(C) = D, l'image de (BC) est (CD).
b) R ∈ (BC), R′ = r(R), R′ ∈ (CD), $(\overrightarrow{AR}, \overrightarrow{AR'}) = \frac{\pi}{2}$ donc R′ ∈ (AP). D'où R′ ∈ (CD) ∩ (AP) = {Q}.
c) On a aussi r(P) = S.
RAQ et PAS sont rectangles isocèles en A.
3. a) S(R) = M et S(P) = N.
b) N = S(P) décrit le segment-image [OD], privé de S(B) = O.
c) R, P, B, C sont alignés. Toute similitude conserve l'alignement.

★**87** **1.** $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont isométriques. Il existe une infinité de rotations transformant $\mathscr{C}$ en $\mathscr{C}'$: leurs centres sont sur la médiatrice de [OO′]. Parmi elles, l'une est d'angle $\frac{\pi}{2}$.
Son centre Ω est tel que :
$$(\overrightarrow{OO'}, \overrightarrow{O\Omega}) = \frac{\pi}{4} \text{ et } O\Omega = \frac{1}{\sqrt{2}}OO'.$$
Ω est donc l'image de O′ dans la similitude de centre O, angle $\frac{\pi}{4}$, rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (ΩOO′ rectangle isocèle en Ω, direct).

Si $M_1 = r(M)$, $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{O'M_1}) = \frac{\pi}{2}$ et $M_1 \in \mathscr{C}_1$, donc $M_1 = M'$.

2. M est image de I par f, similitude directe de centre Ω, d'angle $\frac{\pi}{4}$, de rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Quand M décrit $\mathscr{C}$, I décrit $f(\mathscr{C})$: cercle de centre f(O) = A et de rayon $\frac{1}{\sqrt{2}}$R.

3. f(O) = A ; f(M) = I donc $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{AI}) = \frac{\pi}{4}$.

★★**88** **1.** OM = O′M′.
L'angle d'une telle rotation est $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{O'M'}) = -\frac{\pi}{2}$.

Le centre Ω doit vérifier :
$$\Omega O = \Omega O' \text{ et } (\overrightarrow{\Omega O}, \overrightarrow{\Omega O'}) = -\frac{\pi}{2}.$$
Or, BO = BO′ et $(\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{BO'}) = -(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AO'})$ (réflexion d'axe (OO′)).
Donc Ω = B.

2. r transforme (BM) en (BM′) et $\mathscr{C}$ en $\mathscr{C}'$;
N = $\mathscr{C}$ ∩ (BM′) donc r(N) = $\mathscr{C}'$ ∩ (BM) = N′ (N ≠ B).

3. s est de centre B, de rapport $\sqrt{2}$, d'angle $-\frac{\pi}{4}$.
Quand M décrit $\mathscr{C}$(O ; R), (R = OA), P décrit $s(\mathscr{C})$: cercle de centre s(O) = A, de rayon OA × $\sqrt{2}$ = BA, de même que Q.

★**89** Comme $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}) = \frac{\pi}{3}$ et AMM′ est un triangle rectangle, on déduit que AMM′ est un demi-triangle équilatéral donc que :
$$AM' = \frac{1}{2}AM \text{ et } (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}) = \frac{\pi}{3}.$$
M′ est donc l'image de M par la similitude de centre A, de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

L'ensemble des points M′ est la droite d' image de d par cette similitude.
De la même manière, on prouve que N′ est l'image de N par la similitude directe de centre A, de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.
L'ensemble des points N′ est la droite d'' image de d par cette seconde similitude.

★★**90** **1.** $\mathscr{C}'(A' ; r)$ a pour image par s le cercle $\mathscr{C}_1$ de centre s(A′) = O, de rayon $\frac{r}{\sqrt{2}}$.

2. IMM′ rectangle isocèle en M
⇔ M′ est image de M dans une similitude de centre I, de rapport $\sqrt{2}$, d'angle $\pm\frac{\pi}{4}$
⇔ M image de M′ dans une similitude de centre I, de rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$, d'angle $\pm\frac{\pi}{4}$.
On veut un triangle : prenons $M \in \mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}$ (deux possibilités, M_1 ou M_2). M′ se déduit de I dans la rotation de centre M, d'angle $\frac{\pi}{2}$.
Par les coordonnées :
$$M_1(-1 ; 1), M'_1(2 ; 2) \text{ ou } M_2(-1 ; -1), M'_2(0 ; 0).$$

★★**91** • *Analyse*
$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{4}$ et AC = $\sqrt{2}$ AB, C est l'image de B par la similitude directe de centre A, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.
C est donc à l'intersection, si elle existe, des lignes $d' = s(d)$ et $\mathscr{C}$.
• *Synthèse*
On trace $d' = s(d)$ en plaçant O′ = s(O), puis d et (OA) perpendiculaires conduit à d' et (O′A) sont perpendiculaires.
On remarque que I ∈ d' donc d' et $\mathscr{C}$ se coupent en deux points C_1 et C_2. Il existe donc deux carrés qui répondent aux hypothèses.

Similitudes et suites

★ **92** $z_A = i$, $z_B = \sqrt{2}$, $z_C = \sqrt{2} + i$, $z_I = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

1. $z' = \frac{\sqrt{2}}{2}iz + \sqrt{2}$; s est la similitude directe de centre Ω, d'affixe $\omega = \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{2}{3}i$, de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Enfin le centre de gravité du triangle ABC a pour affixe :

$$\frac{1}{3}(z_A + z_B + z_C) = \frac{1}{3}(2\sqrt{2} + 2i) = \omega.$$

2. • $z_{A_1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $z_{A_2} = \sqrt{2} - \frac{1}{2}i$, $z_{A_3} = \frac{5\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2}i$.

• $u_n = A_n A_{n+1}$

$$= |z_{A_{n+1}} - z_{A_n}| = \left|\left(\frac{\sqrt{2}}{2}iz_{A_n} + \sqrt{2}\right) - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}iz_{A_{n-1}} + \sqrt{2}\right)\right|$$

$$= \left|\frac{\sqrt{2}}{2}i(z_n - z_{n-1})\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}A_{n-1}A_n = \frac{\sqrt{2}}{2}u_{n-1}.$$

$u_0 = A_0A_1 = \left|\frac{\sqrt{2}}{2} - i\right| = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

(u_n) est la suite géométrique de premier terme $u_0 = \frac{\sqrt{6}}{2}$ et de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$ donc $u_n = \frac{\sqrt{6}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$.

• La somme des termes est :

$$S_n = u_0\left(\frac{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}\right) = \frac{\sqrt{6}}{2}\left(\frac{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}\right).$$

• La raison de la suite (u_n) est telle que $-1 < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$, donc $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \frac{\sqrt{6}}{2-\sqrt{2}}$.

★ **93** **1.** s est la similitude directe de centre Ω, d'affixe $1 - i$, de rapport $k = \frac{1}{2}$ et d'angle $\theta = \frac{\pi}{2}$.

2. $\Omega M_{n+1} = \frac{1}{2}\Omega M_n$, donc la suite $(\Omega M_n)_n$ est la suite géométrique de premier terme $\Omega M_0 = |4\sqrt{3} + 4i| = 8$ et de raison $\frac{1}{2}$; $\Omega M_n = 8\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^{n-3}}$.

Pour tout n, on a $\Omega M_{n+1} = \frac{1}{2}\Omega M_n$ et $(\overrightarrow{\Omega M_n}, \overrightarrow{\Omega M_{n+1}}) = \frac{\pi}{2}$, d'où la construction des points M_1, M_2, M_3 et M_4.

$\Omega M_n < 0{,}05$ équivaut à $\frac{1}{2^{n-3}} \leqslant 0{,}05$ ou $2^{n-3} \geqslant 20$, soit $n \geqslant 8$.

3. $M_0M_1 = |-2\sqrt{3} - 4i| = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$.

$d_n = M_nM_{n+1} = |z_{n+1} - z_n|$

$$= \left|\left(\frac{1}{2}iz_n + \frac{1-3i}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}iz_{n-1} + \frac{1-3i}{2}\right)\right|$$

$$= \left|\frac{1}{2}i(z_n - z_{n-1})\right| = \frac{1}{2}M_{n-1}M_n = \frac{1}{2}d_{n-1}.$$

(d_n) est une suite géométrique de premier terme $2\sqrt{7}$ et de raison $\frac{1}{2}$. On a donc $d_n = \frac{\sqrt{7}}{2^{n-1}}$.

La somme des termes est :

$\ell_n = d_0 + d_1 + \ldots + d_n$

$$= 2\sqrt{7}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}\right) = 4\sqrt{7}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right).$$

La raison $\frac{1}{2}$ est comprise entre –1 et 1,

d'où $\lim\limits_{n\to\infty} \ell_n = 4\sqrt{7}$.

4. L'isobarycentre est défini par :

$$(n+1)z_{\overrightarrow{\Omega G_n}} = z_{\overrightarrow{\Omega M_0}} + z_{\overrightarrow{\Omega M_1}} + \ldots + z_{\overrightarrow{\Omega M_n}},$$

soit $\left|z_{\overrightarrow{\Omega G_n}}\right| = \frac{1}{n+1}\left|z_{\overrightarrow{\Omega M_0}} + \ldots + z_{\overrightarrow{\Omega M_n}}\right|$,

d'où $\left|z_{\overrightarrow{\Omega G_n}}\right| \leqslant \frac{1}{n+1}(|\Omega M_0| + |\Omega M_1| + \ldots + |\Omega M_n|)$

$$\leqslant \frac{1}{n+1}\left(8\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}\right)\right) = \frac{16}{n+1}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) \leqslant \frac{16}{n+1}.$$

Comme $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{16}{n+1} = 0$, le point G_n tend vers le point Ω lorsque n tend vers $+\infty$.

★ **94** **1. a)** $Z_n - Z_{n-1} = -u(Z_{n-1} - Z_{n-2})$.

b) Récurrence élémentaire.

c) Addition membre à membre des égalités :

$Z_k - Z_{k-1} = i(-u)^{k-1}$; $1 \leqslant k \leqslant n$;

$Z_n = Z_n - Z_0 = i\sum\limits_{k=1}^{n}(-u)^{k-1} = i\frac{1-(-u)^n}{1+u}$.

2. a) $A_0(0)$; $A_1(i)$; $A_2\left(\frac{-1+3i}{2}\right)$.

s a pour rapport $k = \frac{A_1A_2}{A_0A_1} = |-u| = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

pour angle $\theta = (\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_1A_2}) = \arg(-u) = \frac{\pi}{4}$.

$Z' = (-u)Z + i$.

b) $n \in \mathbb{N}$, $s(A_n)$ a pour affixe $(-u)Z_n + i = \ldots = Z_{n+1}$.

c) $\Omega(-1 + i)$.

3. a) s_4 est la similitude de centre Ω, de rapport $\frac{1}{4}$, d'angle π, c'est-à-dire l'homothétie de centre Ω, de rapport $-\frac{1}{4}$.

b) $A_{n+4} = s_4(A_n)$ donc $\overrightarrow{\Omega A_{n+4}} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{\Omega A_n}$.

c) Les A_{4n}, $n \in \mathbb{N}$, sont sur $D_0 = (\Omega A_0)$ d'équation $y = -x$.

Les A_{4n+1}, $n \in \mathbb{N}$, sont sur $D_1 = (\Omega A_1)$ d'équation $y = 1$.

Les A_{4n+2}, $n \in \mathbb{N}$, sont sur $D_2 = (\Omega A_2)$ d'équation $y = x + 2$.

Les A_{4n+3}, $n \in \mathbb{N}$, sont sur $D_3 = (\Omega A_3)$ d'équation $x = -1$.

B.1. ΩA_nA_{n+1} est rectangle isocèle de sommet A_{n+1}, donc $\Omega A_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\Omega A_n$.

La suite (r_n), $r_n = \Omega A_n$, est géométrique, de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $r_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n r_0$, soit $\Omega A_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \Omega A_0 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}$.

(ΩA_n) converge vers zéro.

La suite de points (A_n) « converge » vers Ω.

2. Pour tout n, $A_nA_{n+1} = \Omega A_{n+1} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$;

$$L_n = \sum_{k=0}^{n} A_kA_{k+1} = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^k = \frac{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}};$$

(L_n) converge vers $\frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} = 2 + \sqrt{2}$.

problèmes de synthèse (page 126)

95 **2. a)** Nécessairement, k est le rapport des rayons : $k = 2$ et $IO' = 2IO$. Donc $I \in G$.

b) et **c)** $MO' = 2MO \Leftrightarrow MO'^2 - 4MO^2 = 0$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MO'} - 2\overrightarrow{MO}) \cdot (\overrightarrow{MO'} + 2\overrightarrow{MO}) = 0.$$

Si A est le barycentre de (O′, 1), (O, – 2) et B le barycentre de (O′, 1), (O, 2),

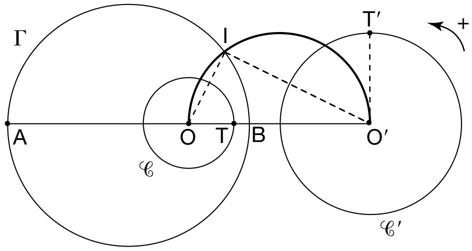
$$MO' = 2MO \Leftrightarrow -3\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0.$$

Donc Γ est le cercle de diamètre [AB].

3. a) Nécessairement, $f(O) = O'$ et le rapport vaut 2.

f transforme (O, T) en (O′, T′),

$(\overrightarrow{OT}, \overrightarrow{O'T}) = \frac{\pi}{2}$ et $T' \in \mathscr{C}'$ d'où T′.



b) $(\overrightarrow{IO}, \overrightarrow{IO'}) = \frac{\pi}{2}$ donc I est sur le demi-cercle de diamètre [OO′], ensemble des points M tels que $(\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MO'}) = \frac{\pi}{2}$.

I est l'intersection de ce demi-cercle et de Γ.

(On a aussi $(\overrightarrow{IT}, \overrightarrow{IT'}) = \frac{\pi}{2}$, donc I est sur le demi-cercle de diamètre [TT′], ensemble des points M tels que $(\overrightarrow{MT}, \overrightarrow{MT'}) = \frac{\pi}{2}$.)

I est unique. La similitude de centre I, de rapport 2, d'angle $\frac{\pi}{2}$, transforme $\mathscr{C}$ en $\mathscr{C}'$.

96 **1. a)** $k = \frac{R_2}{R_1} = 2$.

b) S(B) = C donc IC = 2IB.

c) $IC = 2IB \Leftrightarrow -3\overrightarrow{IK} \cdot \overrightarrow{IL} = 0$, où K barycentre de (C, 1), (B, 2) et L barycentre de (C, 1), (B, – 2).

$\mathscr{T}$ est le cercle de diamètre [KL].

2. S_A est de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{2}$, $A \in \mathscr{T}$.

$E \in \mathscr{C}_1$ donc $E' = S_A(E) \in \mathscr{C}_2$.

$(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AE'}) = \frac{\pi}{2}$. D'où E′ = F.

97 **A. 1.** $v_0 = 1$; $v_1 = re^{i\theta}$.

2. a) Par construction, il existe une similitude de rapport r, d'angle θ, qui transforme (M_{n-1}, M_n) en (M_n, M_{n+1}). Donc $v_n = re^{i\theta}v_{n-1}$.

b) $v_n = r^n e^{in\theta} v_0 = r^n e^{in\theta}$.

c) $v_0 = 1$, $v_1 = \frac{1}{2}(1 + i)$, $v_2 = \frac{1}{2}i$, $v_3 = \frac{1}{4}(-1 + i)$.

B) 1. $Z_0 = 0$; $Z_1 = 1$.

$v_1 = re^{i\theta}v_0 \Leftrightarrow Z_2 - Z_1 = re^{i\theta}(Z_1 - Z_0)$.

D'où $Z_2 = 1 + re^{i\theta}$.

2. $v_n = Z_{n+1} - Z_n$ d'où $Z_n = v_0 + v_1 + ... + v_{n-1}$.

3. $Z_n = 1 + re^{i\theta} + r^2e^{i2\theta} + ... + r^{n-1}e^{i(n-1)\theta} = \dfrac{1 - r^n e^{in\theta}}{1 - re^{i\theta}}$.

4. a) $\left| Z_n - \dfrac{1}{1 - re^{i\theta}} \right| = \left| \dfrac{r^n e^{in\theta}}{1 - re^{i\theta}} \right| = \left| \dfrac{r^n}{1 - re^{i\theta}} \right|$.

Quand n tend vers l'infini, ce module tend vers zéro $(0 < r < 1)$.

b) $\lim\limits_{n \to +\infty} \Omega M_n = 0$; M_n «tend» vers Ω.

5. a) $Z'_n = \dfrac{r^n e^{in\theta}}{1 - re^{i\theta}}$.

b) $a = re^{i\theta}$.

c) f, de centre Ω, de rapport r, d'angle θ.

d) $\omega = 1 + i$, $\Omega M_{n-1} M_n$ rectangle isocèle direct (en M_n).

pour chercher plus (page 126)

98 • La rotation de centre O, d'angle $\frac{\pi}{2}$, transforme M(z) en N(iz).

$(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BN}) = \frac{\pi}{2}$.

$$(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BN}) = \frac{\pi}{2} [\pi] \Leftrightarrow \arg \frac{iz - i}{z - i} = \frac{\pi}{2} [\pi]$$

$$\Leftrightarrow \arg \frac{z - 1}{z - i} = \frac{\pi}{2} [\pi]$$

$$\Leftrightarrow M \in (AB) - \{A, B\}.$$

Notons E = (AB) – {A, B}.

• Si $M \in E$: MBN et MON sont rectangles, d'hypoténuse [MN]. Le milieu I de [MN] vérifie IB = IO.

Donc I est sur la médiatrice Δ de [OB], privée de $K\left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$ et de $K'\left(-\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$, $(M \notin \{A, B\})$.

Réciproquement, si $I \in \Delta$, $I \notin \{K, K'\}$, la distance de I à E est inférieure à IB.

Le cercle de centre I, de rayon IB, recoupe E en un point M. Soit N tel que I soit milieu de [MN].

MBN vérifie MN = IN = IB : MBN rectangle en B.

De plus, si $I\left(\alpha ; \frac{1}{2}\right)$, $\left(|\alpha| \neq \frac{1}{2}\right)$, alors $M\left(\frac{1}{2} + \alpha ; \frac{1}{2} - \alpha\right)$ et $N\left(\alpha - \frac{1}{2} ; \frac{1}{2} + \alpha\right)$, $Z_N = iZ_M$.

Donc le lieu de I est la médiatrice de [OB], privée de K et K′.

Ou mieux :

M est changé en I par S, où S est la similitude de centre O, de rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$, d'angle $\frac{\pi}{4}$.

Quand M décrit E = (AB) – {A, B}, I décrit D = S(E), c'est-à-dire la droite (KK′), privée de K et K′.