Sections planes de surfaces

Travaux dirigés (page 152)

TD 1

1. Soit $M(x_0; y_0; z_0)$.
Le point $M'(0; 0; z_0)$ est le projeté orthogonal de M sur l'axe (Oz) ($\overrightarrow{MM'} \cdot \vec{k} = 0$ et $M' \in (Oz)$).
Soit d la distance de M à (Oz), $d = MM' = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$.
$M \in S \Leftrightarrow x_0^2 + y_0^2 = 9 \Leftrightarrow d = 3$.
2. a) Soit $\Omega(0; 0; 5)$ le point d'intersection de P et de (Oz). L'ensemble des points communs à S et P est l'ensemble des points du plan P situés à la distance 3 de Ω : c'est le cercle de centre Ω de rayon 3 dans le plan P.
b) Soit P′ le plan d'équation $z = -4$.
L'intersection de S et de P′ est le cercle du plan P′ centré en $\Omega'(0; 0; -4)$ et de rayon 3.
3. a) Le point N appartient à S car $x_0^2 + y_0^2 = 9$.
b) $\overrightarrow{MN} = \lambda\vec{k}$: la droite passant par M et dirigée par $\vec{k}$ est contenue dans la surface S. Ceci est vrai pour tout point M de S.
S est une surface réglée.
4. a) $\begin{cases} x = 0 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \text{ ou } y = -3 \end{cases}$,
donc l'intersection de S et du plan d'équation $x = 0$ est la réunion des deux droites définies par :
$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x = 0 \\ y = -3 \end{cases}$$
b) L'intersection de S et du plan d'équation $y = 0$ est la réunion des deux droites définies par :
$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x = -3 \\ y = 0 \end{cases}$$
c) L'intersection de S et du plan d'équation $x = 1$ est la réunion des deux droites définies par :
$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2\sqrt{2} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x = 1 \\ y = -2\sqrt{2} \end{cases}$$
d) • Pour a tel que $|a| < r$, l'intersection de S et du plan d'équation $x = a$ est la réunion des deux droites définies par :
$$\begin{cases} x = a \\ y = \sqrt{r^2 - a^2} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x = a \\ y = -\sqrt{r^2 - a^2} \end{cases}$$
• Pour b tel que $|b| < r$, l'intersection de S et du plan d'équation $y = b$ est la réunion des deux droites définies par :
$$\begin{cases} x = \sqrt{r^2 - b^2} \\ y = b \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x = -\sqrt{r^2 - b^2} \\ y = b \end{cases}$$
• Si $a = r$, l'intersection se réduit à une droite définie par $\begin{cases} x = a \\ y = 0 \end{cases}$, le plan est tangent à S
• Si $b = r$, l'intersection se réduit à une droite définie par $\begin{cases} x = 0 \\ y = b \end{cases}$, le plan est tangent à S.

TD 2

2 a) $f(0; 5) = 5$. **b)** $f(-2; -3) = \sqrt{13}$. **c)** $f(3; 4) = 5$.

3 1. a) $\forall M(x; y; z) \in S$, $\sqrt{x^2 + y^2} \geqslant 0$ donc $z \geqslant 0$ et S est située au-dessus du plan (xOy).
b) $\sqrt{0^2 + 0^2} = 0$ donc $O \in S$.
2. a) $\overrightarrow{HM}(0; 0; z)$ et $\overrightarrow{OH'}(x; y; 0)$.
$\overrightarrow{HM} \cdot \overrightarrow{OH} = 0$ et $HM = OH = \sqrt{x^2 + y^2}$.
b) $N \in [OM] \Leftrightarrow \exists\, k \geqslant 0, \overrightarrow{ON} = k\overrightarrow{OM}$
$\Leftrightarrow \exists k \geqslant 0, N(kx; ky; kz)$.
Or, $\sqrt{(kx)^2 + (ky)^2} = k\sqrt{x^2 + y^2} = kz$.
Donc, si N appartient à [OM], N appartient à S, la demi-droite [OM) est contenue dans S.
3. a) Pour tout $(x; y)$,
$$f(x; y) = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-x)^2 + y^2} = f(-x; y),$$
et la surface S est symétrique par rapport au plan (yOz) d'équation $x = 0$.
b) Pour tout $(x; y)$,
$$f(x; y) = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (-y)^2} = f(x; -y),$$
et la surface S est symétrique par rapport au plan (xOz) d'équation $y = 0$.
4. a) $\begin{cases} z = 5 \\ \sqrt{x^2 + y^2} = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 5 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$
$\Leftrightarrow M(x; y; z)$ appartient au cercle de rayon 5 centré en $\Omega(0; 0; 5)$ dans le plan P.
b) Le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 64$ centré en $\Omega'(0; 0; 8)$ dans le plan Q.
c) Le cercle d'équation $x^2 + y^2 = \lambda^2$ centré en $\Omega''(0; 0; \lambda)$ dans le plan d'équation $z = \lambda$.
5. a) $\begin{cases} x = 0 \\ \sqrt{x^2 + y^2} = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = |y| \end{cases}$ donc l'intersection de S avec le plan d'équation $x = 0$ est la réunion dans le demi-plan (yOz), ($z \geqslant 0$), des demi-droites d'équation $z = y$ et $z = -y$.
b) De même, l'intersection de S avec le plan d'équation $y = 0$ est la réunion dans le demi-plan (xOz), ($z \geqslant 0$), des demi-droites d'équation $z = x$ et $z = -x$.

6. a) Tout point M appartenant à S et au plan P d'équation $x = 1$ a pour coordonnées $(1; y; z)$ avec $\sqrt{1+y^2} = z$, soit encore $z^2 - y^2 = 1$ avec $z > 0$.

b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\ (-1+1) = 0$, $\|\vec{u}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 = \frac{1}{2}\ (1+1) = 1$: les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont bien orthogonaux et de norme 1 et constituent une base orthonormale du plan P.

c) $\overrightarrow{O_1M} = y\vec{j} + z\vec{k} = Y\vec{u} + Z\vec{v}$.

$y = \frac{\sqrt{2}}{2}(Y - Z)$ et $z = \frac{\sqrt{2}}{2}(Y + Z)$ et donc :

$$Y = \frac{\sqrt{2}}{2}(y + z) \text{ et } Z = \frac{\sqrt{2}}{2}(-y + z).$$

d) $YZ = \frac{1}{2}(z^2 - y^2) = \frac{1}{2}$ et $\mathscr{C}$ est une hyperbole ayant pour asymptotes $(O_1; \vec{u})$ et $(O_1; \vec{v})$.

e) Soit $O_\lambda\ (\lambda; 0; 0)$. Dans le repère $(O_\lambda; \vec{u}; \vec{v})$, avec les notations précédentes, $YZ = \frac{1}{2}\lambda^2$ et l'intersection de S avec le plan d'équation $x = \lambda$ est une hyperbole.

7. L'intersection de S avec un plan parallèle à (xOz), donc d'équation $y = \lambda$, est une hyperbole.

Il suffit de raisonner comme dans la question **6.** en remplaçant y par x et Y par X.

8. a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4z^2 \\ z = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 36 \\ z = -3 \end{cases}$

Donc l'intersection du cône avec le plan P d'équation $z = -3$ est le cercle du plan P de rayon 6 centré sur l'axe $(O; \vec{k})$.

b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4z^2 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y^2 - 4z^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2z \text{ ou } y = -2z \end{cases}$

Donc l'intersection du cône avec le plan P d'équation $x = 0$ est la réunion des deux droites définies par :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 2z \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x = 0 \\ y = -2z \end{cases}$$

c) Tout point M appartenant à S et au plan P d'équation $x = 2$ a pour coordonnées $(2; y; z)$ avec $4 + y^2 = 4z^2$, soit encore $4z^2 - y^2 = 4$ avec $z > 0$.

$\overrightarrow{O_2M} = y\vec{j} + z\vec{k} = Y\vec{u} + Z\vec{v}$.

$y = Y + Z$ et $z = \frac{1}{2}(Y - Z)$ et donc :

$$Y = \frac{1}{2}y + z \text{ et } Z = \frac{1}{2}y - z.$$

$YZ = \frac{1}{4}y^2 - z^2 = -1$: l'intersection de S avec le plan d'équation $x = 2$ est une hyperbole.

TD 3

1. a) Pour tout $M(x; y; z)$ de S, $z = x^2 + y^2 \geqslant 0$: S est située au-dessus du plan (xOy).

b) $0^2 + 0^2$: le point O est sur S.

2. a) Pour tout $(x; y)$,

$$f(x; y) = x^2 + y^2 = (-x)^2 + y^2 = f(-x; y)$$

et la surface S est symétrique par rapport au plan (yOz) d'équation $x = 0$.

b) Pour tout $(x; y)$, $f(x; y) = x^2 + y^2 = x^2 + (-y^2) = f(x; -y)$ et la surface S est symétrique par rapport au plan (xOz) d'équation $y = 0$.

3. a) $A(1; 1; 2)$, $B(-1; 1; 2)$, $C(-1; -1; 2)$ et $D(1; -1; 2)$ appartiennent à S.

b) $z = 2$.

c) Dans le plan d'équation $z = 2$, $x^2 + y^2 = 2$ est l'équation du cercle centré sur la demi-droite $[Oz)$ et de rayon $\sqrt{2}$.

d) Dans le plan d'équation $z = 4$, $x^2 + y^2 = 4$ est l'équation du cercle centré sur la demi-droite $[Oz)$ et de rayon 2.

e) Dans le plan d'équation $z = \lambda$, $x^2 + y^2 = \lambda$ est l'équation du cercle centré sur la demi-droite $[Oz)$ et de rayon $\sqrt{\lambda}$.

4. a) Dans le plan d'équation $x = 0$, $z = y^2$ est l'équation d'une parabole d'axe $(O, \vec{k})$.

b) Dans le plan d'équation $y = 0$, $z = x^2$ est l'équation d'une parabole d'axe $(O, \vec{k})$.

5. a) Dans le plan d'équation $x = 2$, $z = y^2 + 4$ est l'équation d'une parabole d'axe $(O_1, \vec{k})$ avec $O_1(2; 0; 4)$.

b) Dans le plan d'équation $y = 2$, $z = x^2 + 4$ est l'équation d'une parabole d'axe $(O_2, \vec{k})$ avec $O_2(0; 2; 4)$.

c) Dans le plan d'équation $x = \lambda$, $z = y^2 + \lambda^2$ est l'équation d'une parabole d'axe $(\Omega, \vec{k})$ avec $\Omega\ (\lambda; 0; \lambda^2)$.

6. D'après la question **3. e)**, tout point de la parabole $\mathscr{P}$, intersection de S et du plan d'équation $x = 0$, a pour image, dans une rotation d'axe $(O, \vec{k})$, un point de S.

Réciproquement, pour tout point de S de cote λ, la ligne de niveau $z = \lambda$ qui contient ce point est un cercle qui contient un point (et même deux...) de la parabole $\mathscr{P}$.

7. a) $A(x; y; z)$ et $B(x'; y'; z')$ sont deux points distincts de S, donc $z = x^2 + y^2$ et $z' = x'^2 + y'^2$.

Soit M le milieu du segment [AB].

$M \in S \Leftrightarrow \frac{z + z'}{2} = \left(\frac{x + x'}{2}\right)^2 + \left(\frac{y + y'}{2}\right)^2$

$\Leftrightarrow \frac{x^2 + y^2 + x'^2 + y'^2}{2} = \frac{x^2 + y^2 + x'^2 + y'^2}{4} + \frac{xx' + yy'}{2}$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + x'^2 + y'^2 = 2(xx' + yy')$

$\Leftrightarrow (x - x')^2 + (y - y')^2 = 0 \Leftrightarrow x = x'$ et $y = y'$.

Or, A et B sont distincts, donc M n'appartient pas à S.

b) Si un segment de droite [AB] est contenu dans S, alors le milieu de [AB] est dans S, ce qui est, d'après la question précédente, impossible : la surface S ne contient aucun segment de droite.

TD 4

1. a) $xy = 0 = z$.

b) $xy = (-x)(-y)$: la surface S est symétrique par rapport à l'axe $(O; \vec{k})$.

2. $xy = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $y = 0$. L'intersection de S et du plan (xOy) est la réunion des deux axes $(O; \vec{i})$ et $(O; \vec{j})$.

3. a) $A(1; -1; -1)$, $B(2 : -\frac{1}{2}; -1)$, $C(\frac{1}{2}; -2; -1)$ et $D(10; -0{,}1; -1)$.

b) Ils appartiennent à S et au plan d'équation $z = -1$.

c) $\begin{cases} z = xy \\ z = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = -1 \\ z = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{x} \\ z = -1 \end{cases}$ (car $x \neq 0$).

L'intersection de S et du plan P est l'hyperbole équilatère, dans le plan P, d'équation $y = -\frac{1}{x}$.

d) L'intersection de S et du plan d'équation $z = \lambda$ est l'hyperbole d'équation $y = \frac{\lambda}{x}$.

4. a) $\begin{cases} z = xy \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow x = z = 0$, donc l'intersection de S avec le plan d'équation $x = 0$ est contenue dans la droite intersection des plan d'équations $x = 0$ et $z = 0$.

Réciproquement, tout point de la droite intersection des plans d'équation $x = 0$ et $z = 0$ appartient à S car $0 \times y = 0$.

L'intersection de S avec le plan d'équation $x = 0$ est donc l'axe $(O; \vec{j})$.

b) De même, l'intersection de S avec le plan d'équation $y = 0$ est l'axe $(O; \vec{k})$.

c) $\begin{cases} z = xy \\ x = \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ z = \lambda y \end{cases}$:

l'intersection de S avec le plan d'équation $x = \lambda$ est la droite de ce plan d'équation (dans ce plan) $z = \lambda y$.

De même, l'intersection de S avec le plan d'équation $y = \lambda$ est la droite de ce plan d'équation (dans ce plan) $z = \lambda x$.

5. $\begin{cases} z = xy \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = x^2 \\ x - y = 0 \end{cases}$:

l'intersection de S et du plan d'équation $x - y = 0$ est la parabole d'équation (dans ce plan) $z = x^2$.

TD 5

1. a) $R = \text{bar}\{(M, \mu), (N, 1 - \mu)\}$
$= \text{bar}\{(A, \mu\lambda), (B, \mu(1 - \lambda)), (C(1 - \mu)(1 - \lambda)), (D, \lambda(1 - \mu)\}$
$= \text{bar}\{(A, \mu\lambda), (D, \lambda(1 - \mu)), (B, \mu(1 - \lambda)), (C(1 - \mu)(1 - \lambda))\}$
$= \text{bar}\{(P, \lambda), (Q, 1 - \lambda)\}$.

b) Il résulte du **a)** que, quels que soient λ et μ (non nuls), R appartient à (MN) et à (PQ) : ces deux droites sont concourantes.

2. a) Immédiat.

b) $\overrightarrow{OM} = \lambda \overrightarrow{OA} + (1 - \lambda) \overrightarrow{OB}$: les coordonnées de M sont donc $(\lambda - (1 - \lambda); \lambda + (1 - \lambda); \lambda - (1 - \lambda))$, soit :

$$(\lambda - (1 - \lambda); 1; \lambda - (1 - \lambda)),$$

qui vérifient bien $xy = z$. Donc M appartient bien à S.

La vérification se fait de la même façon pour N, P et Q.

c) Cela résulte de la définition barycentrique d'une droite : par exemple, la droite (AB) est l'ensemble des barycentres de (A, λ) et de $(B, 1 - \lambda)$, avec λ réel.

d) D'après **2. b)**, les coordonnées de M sont :

$$(2\lambda - 1; 1; 2\lambda - 1).$$

On trouve de la même manière $N(2\lambda - 1; -1; 1 - 2\lambda)$.

R est le barycentre de (M, μ) et de $(N, 1 - \mu)$, donc $\overrightarrow{OR} = \mu\overrightarrow{OM} + (1 - \mu)\overrightarrow{ON}$ et les coordonnées de R sont $(2\lambda - 1; 2\mu - 1; (2\lambda - 1)(2\mu - 1))$.

Elles vérifient $xy = z$, donc R appartient bien à S.

e) (AB) est l'ensemble des points $M(2\lambda - 1; 1; 2\lambda - 1)$ qui appartiennent au plan P_1 d'équation $y = 1$.

f) Les coordonnées de E vérifient $\begin{cases} z = xy \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow x = z$, donc E appartient au plan P_2 d'équation $x - z = 0$. P_1 et P_2 sont sécants car les vecteurs $\overrightarrow{n_1}(0; 1; 0)$ et $\overrightarrow{n_2}(1; 0; -1)$, normaux respectivement à P_1 et à P_2, ne sont pas colinéaires. Leur intersection est donc une droite.

Elle contient les points A et B : c'est la droite (AB).

g) Cela résulte de **e)** et de **f)**.

De même, l'intersection de S et du plan P_3 est la droite (AD).

3. a) Le plus court chemin semble passer par les «nœuds» en gras sur la figure.

b) Chaque «nœud» représente un point R (avec les notations du début) avec $\lambda = \mu$, donc (voir **d)**) les coordonnées de R sont $(2\lambda - 1; 2\lambda - 1; (2\lambda - 1)^2)$.

Elles vérifient $x = y$: les nœuds des mailles utilisés sont bien dans le plan d'équation $x - y = 0$.

c) $\begin{cases} x = y \\ z = xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = x^2 \end{cases}$

Donc le chemin est un arc de la parabole d'équation $z = x^2$ dans le plan d'équation $x - y = 0$.

Corrigés des exercices *pour progresser* (page 161)

1 *Corrigé dans le manuel.*

2 **1. a)** Dans $(O; \vec{j}, \vec{k})$, la courbe $\mathscr{C}$ a pour équation $z = y^2 - 4$: c'est une parabole.

b) $\mathscr{C}$ a pour sommet le point de coordonnées $(0; 0; -4)$. Elle coupe l'axe $(O; \vec{j})$ aux points de coordonnées $(0; 2; 0)$ et $(0; -2; 0)$.

2. Dans le plan d'équation $x = \lambda$, de repère $(O_1; \vec{j}, \vec{k})$ avec $O_1(\lambda; 0; 0)$, $z = y^2 - 4$ est l'équation d'une parabole, image de $\mathscr{C}$ dans la translation de vecteur $\lambda\vec{i}$.

3. a) $\begin{cases} z = y^2 - 4 \\ z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 3 \\ y^2 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 3 \\ y = -\sqrt{7} \text{ ou } y = \sqrt{7} \end{cases}$

La section de S par le plan d'équation $z = 3$ est la réunion de deux droites (parallèles) intersections des plans d'équation $y = -\sqrt{7}$ et $y = \sqrt{7}$ avec le plan d'équation $z = 3$.

b) $\begin{cases} z = -4 \\ z = y^2 - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -4 \\ y = 0 \end{cases}$

La section de S par le plan d'équation $z = -4$ est la droite intersection des plans d'équation $y = 0$ et $z = -4$.

c) L'équation $\lambda = y^2 - 4$ (équivalente à $y^2 = \lambda + 4$) admet des solutions (en y) pour $\lambda > -4$.

Pour $\lambda > -4$, le plan d'équation $z = \lambda$ coupe S.

Remarque : Pour $\lambda = -4$, le plan est tangent à S.

4. a) $\begin{cases} y = 0 \\ z = y^2 - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = -4 \end{cases}$

Le plan P d'équation $y = 0$ coupe S suivant la droite intersection de P avec le plan d'équation $z = -4$.

C'est le plan tangent vu au **3. c)**.